<u>Aufgaben zur Veranstaltung „Mathematik für Informatiker“</u>

Aufgabe 62
Bestimmen Sie für die folgenden reellen Matrizen alle Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:

a. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$; c. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 63
Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist.

Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht, eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{\,B,B} = D$.

Aufgabe 64
Untersuchen Sie mit Hilfe von L.6.2.2., welche der Matrizen aus Aufgabe 62 diagonalisierbar sind.
Geben Sie für die diagonalisierbaren Matrizen eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht, eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D an mit $C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{\,B,B} = D$.

Aufgabe 65
a. Zeigen Sie, dass $(d_n) = (\frac{1}{10} n!)$ nicht beschränkt ist.
b. Zeigen Sie, dass $(e_n) = (\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2})$ streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 66
Zeigen Sie <u>mit Hilfe von A.1.1.5.</u>, dass für $(a_n) = (\frac{1}{n^2})$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 67
Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:
a. $(a_n) = \left(\dfrac{4n^2 + 6n - 17}{7n^2 + 3n + 5} \right)$ b. $(b_n) = \left(\dfrac{n + \arctan(n)}{3n + 1} \right)$ c. $(c_n) = ((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2})$.

Aufgabe 68
Zeigen Sie mit Hilfe des Einschachtelungssatzes und unter Ausnutzung der bekannten Resultate $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + n + 2} = 1.$$