

Aufgaben zur Veranstaltung „Mathematik für Informatiker“

Aufgabe 69 mit Anregung zum Programmieren

Gegeben ist das folgende Programm (dabei sollen eventuelle Probleme, die sich beim Überprüfen von Gleichheit und durch Rundung ergeben, ignoriert werden):

natürliche Zahl p einlesen	
Vorgänger gleich 1 setzen	
Näherung gleich p setzen	
Solange Näherung ungleich Vorgänger	
	Vorgänger gleich Näherung setzen
	Näherung durch $\frac{(\text{Näherung})^2 + p}{2 \cdot \text{Näherung}}$ ersetzen
Näherung ausgeben	

- a. Vollziehen Sie den Verlauf des Programms für $p = 3$ mit dem Taschenrechner oder Computer nach. Welche Zahl wird näherungsweise (als „Näherung“) berechnet?
b. Zeigen Sie, dass für $p \in \mathbb{N}$ die durch die folgende Vorschrift rekursiv definierte Folge (a_n)

$$\text{I. } a_1 = p;$$

$$\text{II. } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergent ist mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{p}$.

- c. Welche Zahl wird also mit dem obigen Programm näherungsweise (im Rahmen der Rechnergenauigkeit) berechnet?

Aufgabe 70

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen komplexer Zahlen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a. $(z_n) = ((\frac{n+1}{n})^n + (1 + \frac{1}{n} \cdot \sin(n^2)) \cdot i)$; b. $(z_n) = ((\frac{3}{4})^n + 2^n \cdot i)$; c. $(z_n) = ((\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot i)^n)$.

Aufgabe 71

Zeigen Sie für $(a_n) = (-n^2 + \frac{1}{2}n - 2)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Aufgabe 72

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 73 (ohne Parallelaufgabe in den Übungen)

Ein Sparer bringt zu Beginn eines jeden Jahres ein Kapital $K > 0$ auf sein Sparbuch. Zum Ende eines jeden Jahres werden 4 % Zinsen gutgeschrieben..

K_n sei das Kapital auf dem Sparbuch zu Ende des n . Jahres – vorausgesetzt, dass nichts abgehoben wird.

- a. Bestimmen Sie K_n .
b. Berechnen Sie K_{10} für $K = 100$ GE (Geldeinheiten).