Aufgaben zur Veranstaltung „Mathematik für Informatiker“

Aufgabe 82
Schreiben Sie als einen Logarithmus: $2\cdot\ln(x^2-y^2)-\ln((x-y)^2)+\ln(2)$.

Aufgabe 83 (Tüftelaufgabe)
Zeigen Sie für alle $x, y\in\mathbb{R}$:
$\cos(x+y)=\cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)$ und
$\sin(x+y)=\sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)$.

Aufgabe 84
Berechnen Sie die folgenden Funktionswerte der komplexen Exponentialfunktion.
a. $\exp(\frac{\pi}{2}\cdot i)$; b. $\exp(2+\frac{\pi}{3}\cdot i)$.
Die Ergebnisse sind stets genau in Normalform anzugeben.

Aufgabe 85
$f:[0;2]\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x)=\begin{cases}0 & \text{falls } 0\le x<1;\\ 1 & \text{falls } 1\le x<2;\\ 2 & \text{falls } x=2.\end{cases}$

f beschreibt das „Abschneiden“ der Nachkommastellen – viele Programmiersprachen liefern etwas Vergleichbares!
Untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert. Ist f in $x_0=1$ stetig?

Aufgabe 86
Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.1.1., dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ stetig ist.

Aufgabe 87
$f:[1;2]\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x)=x^4-4x+1$.
a. Begründen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle x_0 hat. Man kann zeigen, dass x_0 eindeutig bestimmt ist.
b. Bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren einen Näherungswert r von x_0 mit $|r-x_0|<0,2$.

Aufgabe 88
Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^3$ mit Hilfe der Definition A.2.2.1. auf Differenzierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.
Tipp: $x^3-x_0^3=(x-x_0)\cdot(x^2+x\cdot x_0+x_0^2)$.

Aufgabe 89
a. Zeigen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$: $f_n(x)=x^n \Rightarrow f_n'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
b. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$. Berechnen Sie $h'(x)$.