

## Aufgaben zur Veranstaltung „Mathematik für Informatiker“

### Aufgabe 90

Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.2.5.:  $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$ .

### Aufgabe 91

Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.2.6.:  $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  für alle  $x \in ]0; \infty[$ .

Tipp : Betrachten Sie  $f : ]0; \infty[ \rightarrow ]0; \infty[$  mit  $f(x) = x^2$  und beachten Sie  $g = f^{-1}$ .

### Aufgabe 92

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Vorschriften: a.  $h(x) = \sin(x^3 + 5)$ ; b.  $h(x) = \sin^3(x + 5)$ .

### Aufgabe 93

Differenzieren Sie unter Ausnutzung der Tabelle wichtiger Ableitungen und der Ableitungsregeln die Funktionen mit den folgenden Vorschriften; vereinfachen Sie das Ergebnis nach Möglichkeit:

- a.  $f(x) = x \cdot \ln(x)$ ; b.  $f(x) = \ln(x \cdot \cos(x))$ ; c.  $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2}))$ .

### Aufgabe 94

$f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x) = 3 \cdot (2x - 1)^{-1}$ .

a. Berechnen Sie  $f^{(n)}(x)$  für  $n = 1; 2; 3$ .

b. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2x - 1)^{-(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

### Aufgabe 95

$f : ]-1; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ .

Bestimmen Sie das 3. Taylorpolynom von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

### Aufgabe 96

a. Zeigen Sie:  $\sqrt[3]{28} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}}$ .

b. Berechnen Sie mit Hilfe des Resultats von Aufgabe 95 einen Näherungswert für  $\sqrt[3]{28}$  und schätzen Sie den absoluten Fehler mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange ab.

### Aufgabe 97 ( Tüftelaufgabe ohne Parallelaufgabe in den Übungen mit Anregung zum Programmieren )

Über  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind folgende Eigenschaften bekannt:

a.  $f$  ist unendlich oft differenzierbar.

$$b. f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n \in \mathbb{N}_0, \\ 1 & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

c.  $|f^{(n)}(x)| \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0, x \in [0; 1]$ .

Schreiben Sie ein Programm, das nach Eingabe von  $x \in [0; 1]$  und  $\varepsilon > 0$  einen Näherungswert der Form  $p_n(x)$  für  $f(x)$  berechnet, wobei  $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$  gilt. ( Struktogramm ! )

Welche Ausgabe erhalten Sie für  $x = 0,1, \varepsilon = 10^{-6}$ ?