

# 1 Bruchrechnung

Dieses Modul beschäftigt sich mit Bruchrechnung.

Inhalt:

1	Bruchrechnung .....	1
1.1	Einführung eines Bruches.....	2
1.2	Das Rechnen mit Brüchen .....	4
1.2.1	Multiplikation von Brüchen .....	4
1.2.2	Auseinandernehmen eines Bruches .....	7
1.2.3	Erweitern und Kürzen von Brüchen .....	9
1.2.3.1	Das Erweitern von Brüchen .....	9
1.2.3.2	Das Kürzen von Brüchen .....	10
1.2.3.3	Aus Summen kürzen nur die Dummen.. ..	12
1.2.3.4	Die Primzahlanalyse .....	13
1.2.3.5	Teilbarkeitsregeln .....	15
1.2.4	Das Addieren von Brüchen .....	17
1.2.4.1	Das Gleichnamigmachen von Brüchen.....	19
1.2.4.2	Das kleinste gemeinsame Vielfache .....	21
1.2.4.3	Der Einsatz des kgV bei der Addition von Brüchen .....	23
1.3	Besonderheiten bei Brüchen .....	26
1.3.1	Echte Brüche .....	26
1.3.2	Unechte Brüche .....	26
1.3.3	Gemischte Brüche: .....	26

## 1.1 Einführung eines Bruches

Ein Bruch stellt sich im einfachsten Fall als ein Strich mit einer Zahl über und unter dem Strich dar:

$$\frac{a}{b}$$

Zähler

Nenner

Die Zahl über dem Strich heisst *Zähler*, die Zahl unter dem Strich heisst *Nenner*. Der Bruch selbst ist zu verstehen als eine Anweisung, den Zähler durch den Nenner zu dividieren. Das heisst, ein Bruch bedeutet

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Beispiele für Brüche:

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0,5$$

$$\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0,\bar{3} \quad (\text{Der Strich über der 3 bedeutet } \textit{Periode}, \text{ also } 0.33333333333333333333\dots)$$

$$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,25$$

Dabei können  $a$  und  $b$  auch Ausdrücke sein, z.B.

$$\frac{5+3}{2+8} = (5+3) \div (2+8) = 8 \div 10 = 0,8$$

oder mit allgemeinen Variablen

$$\frac{x+1}{x-1} = (x+1) \div (x-1)$$

Wichtig bei Ausdrücken ist, daß Zähler und Nenner automatisch in Klammern stehen, wenn der Bruch als Division ausgedrückt wird.

Zusammenfassend:

*Ein Bruchstrich ist eine Anweisung, den obenstehenden Zähler durch den untenstehenden Nenner zu dividieren.*

Aufgaben:

1) Rechnen Sie folgende Brüche in Dezimalzahlen um (ohne Taschenrechner):

a)  $\frac{3}{9}$

b)  $\frac{4}{8}$

c)  $\frac{25}{5}$

d)  $\frac{3}{2+1}$

e)  $\frac{2-1}{3}$

f)  $\frac{2+1}{8-2}$

2) Was geschieht mit einem Bruch, wenn der Nenner 0 wird, also z.B.  $\frac{1}{x-1}; x=1$ ?

3) Und was passiert mit dem Bruch, wenn der Zähler 0 wird, z.B.  $\frac{x-1}{3}; x=1$ ?

## 1.2 Das Rechnen mit Brüchen

Rechnen mit Brüchen unterscheidet sich etwas von Rechnen mit normalen Zahlen. Besonders das Addieren von Brüchen kann manchmal etwas kompliziert erscheinen – ist es aber nicht wirklich.

### 1.2.1 Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation von Brüchen ist sehr einfach: Mann multipliziert die Zahlen im Zähler und die Zahlen im Nenner. Als Beispiel:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}$$

oder in allgemeiner Form:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

dabei bedeuten  $a, b, c$  und  $d$  beliebige Zahlen. Dabei ergeben sich zwei interessante Sonderfälle:

a) Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl:

etwas formalistisch ausgedrückt, lässt sich auch jede (ganze) Zahl als Bruch schreiben, indem man sie durch 1 teilt, z.B.

$$5 = \frac{5}{1}$$

Damit ergibt sich für eine Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$$

*Wird ein Bruch mit einer Zahl multipliziert, wird nur der Zähler des Bruches mit der Zahl multipliziert*

Ein Beispiel:

$$\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3}$$

Wenn im Zähler oder im Nenner nicht nur eine Zahl, sondern ein Ausdruck steht, denken Sie daran, daß der Bruchstrich automatisch eine Klammer bedeutet:

$$\frac{7+2}{4} \cdot 3 = \frac{(7+2) \cdot 3}{4} \text{ oder}$$

$$\frac{4}{7+2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{(7+2) \cdot 3}$$

## b) Division als Bruchdarstellung

Wir haben zu Beginn festgestellt, daß der Bruchstrich einer Division entspricht, z.B.

$$5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

Unter der Ausnutzung der Multiplikation kann man dafür schreiben

$$5 \div 3 = \frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

Das Ergebnis mag zwar etwas trivial erscheinen, hat aber große Bedeutung: Man kann die Division ersetzen durch eine Multiplikation mit einem Bruch, bei der der Divisor (die Zahl, durch die geteilt wird) im Nenner und im Zähler eine 1 steht. Dieser Bruch heisst *Kehrwert*.

Im allgemeinen heisst *Kehrwert*, daß Zähler und Nenner vertauscht werden. Also zum Beispiel

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$$

oder allgemein für Kehrwert:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$$

Besondere Fälle dabei sind Zahlen:

$$3 = \frac{3}{1} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Hier hat der Kehrwert im Zähler eine 1.

Damit kommen wir zur allgemeinen Formulierung:

*Die Division kann ausgedrückt werden als die Multiplikation mit dem Kehrwert.*

Beispiele:

$$6 \div 3 = 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$$

oder für Brüche:

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{4}$$

## Aufgaben:

1) Multiplikation: Berechnen Sie folgende Ausdrücke schrittweise:

a)  $\frac{5}{2} \cdot 3$       b)  $2 \cdot \frac{6}{8}$       c)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$       d)  $\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{2}$       e)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$       f)  $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5}$

2) Division. Berechnen Sie folgende Ausdrücke

a)  $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$       b)  $\frac{2}{6} \div \frac{3}{4}$       c)  $\frac{3-1}{3+1} \div \frac{4}{2}$       d)  $34 \div \frac{1}{2}$

3) Sie haben von einem Geburtsatsfest noch eine halbe Torte übrig. Diese wollen Sie an 4 Kinder verteilen. Wieviel Torte bekommt jedes Kind?

### 1.2.2 Auseinandernehmen eines Bruches

Um mit Brüchen arbeiten zu können, ist es sinnvoll, ein mathematisches Gesetz anzuschauen. Dieses besagt folgendes:

Wenn eine Summe  $(a + b)$  mit einer Zahl  $c$  multipliziert wird, ist das Ergebnis  $a \cdot c + b \cdot c$ . Dieses Gesetz ist bekannt als das *Distributivgesetz*.

Das Distributivgesetz besagt:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

oder

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

das Distributivgesetz in der oberen Form ist ebenso gültig, wenn man das *mal* durch ein *geteilt* ersetzt:

$$(a + b) \div c = a \div c + b \div c$$

**Achtung:** Bei der Division gilt das **nicht**, wenn man durch die Klammer teilt!

$$c \div (a + b) \neq \frac{c}{a} + \frac{c}{b}!$$

Das bedeutet, daß jede Zahl, die in der Klammer steht, mit der Zahl multipliziert wird, die hinter bzw. vor der Klammer steht. Einige Beispiele:

$$5 \cdot (3 + 8) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 8$$

$$(2 + 7) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 3$$

Achten Sie dabei auf Vorzeichen!

$$5 \cdot (3 - 1) = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 1$$

Warum ist dieses Gesetz für Brüche wichtig? Schauen Sie auf den folgenden Bruch:

$$\frac{6+9}{3}$$

Da wir wissen, daß ein Bruch bedeutet, den Zähler durch den Nenner zu teilen, können wir schreiben

$$\frac{6+9}{3} = (6+9) \div 3$$

und das ist gleich (Anwendung des Distributivgesetzes)

$$6 \div 3 + 9 \div 3 = 2 + 3 \text{ (Denken Sie an Punkt-vor-Strichrechnung).}$$

Ersetzen wir die Division durch Bruchstriche, bedeutet das, dass wir den Bruch zerlegen können:

$$\frac{6+9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3}$$

Zusammengefasst und allgemein ausgedrückt:

Steht im Zähler (oben um Bruch) eine Ausdruck und um Nenner eine Zahl, kann man den Bruch in mehrere Brüche aufteilen, wobei jeder Bruch den gleichen Nenner hat:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

**Achtung:** das funktioniert nicht andersrum! Steht im Nenner ein Ausdruck, kann man diesen nicht zerlegen:

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Das durchgestrichene Gleichheitszeichen  $\neq$  bedeutet *ungleich*. Ein einfacher Test mit Zahlen überzeugt einen davon. Setzen wir für

$$a = 8$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

so folgt für die linke Seite

$$\frac{8}{2+4} = \frac{8}{6} = 1,\overline{3}$$

und für die rechte Seite:

$$\frac{8}{2} + \frac{8}{4} = 4 + 2 = 6$$

Wie man sofort sieht, ist  $1,\overline{3} \neq 6$ .

Steht im Nenner also ein Ausdruck, kann man diesen nicht weiter auseinandernehmen.

**Aufgaben:**

Zerlegen Sie, wenn es geht, folgende Brüche:

a)  $\frac{3+9}{3}$       b)  $\frac{6+8}{4}$       c)  $\frac{3+8}{5+6}$       d)  $\frac{1}{2+3}$

### 1.2.3 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Brüche haben einige interessante Eigenschaften: sie lassen sich *erweitern* und *kürzen*. Das heißt, dass ein und dieselbe Zahl durch verschiedene Ausdrücke beschrieben werden kann. Fangen wir mit dem Erweitern von Brüchen an:

#### 1.2.3.1 Das Erweitern von Brüchen

Stellen Sie sich folgenden Brüche vor:

$$\frac{3}{6}, \frac{6}{12}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}$$

was ist diesen Brüchen gemeinsam? Fassen Sie den Bruchstrich als Division auf und berechnen Sie einmal die Ergebnisse mit dem Taschenrechner. Was bemerken Sie?

**Achtung:** Wenn Sie Brüche mit dem Taschenrechner berechnen, nutzen Sie bitte nicht eine eventuell vorhandene Bruch-Funktion, sondern rechnen Sie z.B.  $3 \div 6$

Wie sie sehen, kommt bei allen Brüchen dasselbe Ergebnis heraus, nämlich 0,5 Warum eigentlich?

Nehmen wir zuerst den einfachsten Bruch,  $\frac{1}{2}$ . Wie sie wissen, kann man eine Zahl so oft mit eins multiplizieren, wie man will, sie bleibt gleich. Also gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

In Bruchschreibweise kann man die Eins nun auch anders schreiben. Eine Zahl geteilt durch sich selbst ist immer eins, also kann man für die eins schreiben

$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$  und so weiter. Multiplizieren wir spaßeshalber den Ursprungsbruch  $\frac{1}{2}$  mit diesen so

dargestellten Einsen, verändern wir also nichts:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6}$$

Rechnen wir mit den Regeln der Bruchmultiplikation die einzelnen Brüche aus, erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

also genau die Brüche, von denen wir ausgegangen sind.

Zusammengefasst bedeutet das allgemein:

Multipliziert man zu einem Bruch  $\frac{a}{b}$  eine Eins in der Darstellung  $\frac{c}{c}$ , so ändert man den Bruch damit nicht:  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ . Dieses Vorgehen heißt **erweitern**.

Das Erweitern eines Bruches mag hier noch etwas sinnlos erscheinen, wird aber wichtig bei der Addition von Brüchen. Interessant wird es auch, wenn wir es umkehren und zum *Kürzen* von Brüchen kommen.

Aufgaben:

Erweitern Sie folgende Brüche mit  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{3}$  und  $\frac{5}{5}$ :

a)  $\frac{1}{6}$       b)  $\frac{2}{3}$       c)  $\frac{3}{4}$

### 1.2.3.2 Das Kürzen von Brüchen

Wenn man die grade beschriebene Erweiterung eines Bruches umdreht, kommt man zum *Kürzen* von Brüchen. Beim Erweitern ‚bläst‘ man einen Bruch auf, beim Kürzen sucht man nach einer einfacheren Darstellung.

Nehmen wir als Beispiel folgenden Bruch  $\frac{6}{8}$ . Um einen Bruch zu kürzen, müssen Sie untersuchen, ob

Sie den Bruch so schreiben können, dass sie Faktoren finden, die im Zähler und im Nenner gleich sind und damit eine Erweiterung sind. Dazu schauen Sie, ob sie die Zahlen im Zähler und Nenner durch gleich Zahlen teilen können. Probieren wir es bei dem Beispielbruch mit 2:

Zähler:  $6 \div 2 = 3$

Nenner:  $8 \div 2 = 4$

Zähler und Nenner lassen sich also beide durch 2 teilen. Dann stellen wir die Zahlen im Zähler und Nenner als Produkt mit der gefundenen Zahl dar:

Zähler:  $6 = 2 \cdot 3$

Nenner:  $8 = 2 \cdot 4$

Sie können vielleicht die Idee dahinter schon erkennen: Setzen wir die so umgeschriebenen Zahlen wieder in den Bruch ein, haben wir oben und unten jeweils den gefundenen Teiler, hier die 2 stehen:

$$\frac{6}{8} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

Wir sehen, dass dieser Bruch eine Multiplikation mit einer *Eins* enthält, die wir weglassen können:

$$\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Wir haben also die Erweiterung  $1 = \frac{2}{2}$  im Bruch gefunden und entfernt. Im jetzt entstandenen Bruch gibt es im Zähler (=3) und im Nenner (=4) keinen gemeinsamen Teiler mehr, wir sind also fertig, der Bruch lässt sich nicht mehr weiter kürzen.

Gehen wir zu einem etwas komplizierterem Beispiel: Der Bruch

$$\frac{60}{42}$$

sieht schon etwas unhandlicher aus. Fangen wir wieder mit der 2 an und prüfen, ob sich Zähler und Nenner durch 2 kürzen lassen:

$$\text{Zähler: } 60 \div 2 = 30$$

$$\text{Nenner: } 42 \div 2 = 21$$

Prima, die zwei tuts. Also schreiben wir Zähler und Nenner wieder als Produkt mit 2:

$$\text{Zähler: } 60 = 2 \cdot 30$$

$$\text{Nenner: } 42 = 2 \cdot 21$$

und setzen das in den Bruch ein:

$$\frac{60}{42} = \frac{2 \cdot 30}{2 \cdot 21} = \frac{2}{2} \cdot \frac{30}{21} = 1 \cdot \frac{30}{21} = \frac{30}{21}$$

Jetzt haben wir einen neuen Bruch, fangen also wieder von vorne an. Lassen sich Zähler und Nenner durch 2 teilen? Nein, der Nenner streikt, 21 ist nicht durch 2 teilbar. Also probieren wir die nächste Zahl, die 3

$$\text{Zähler: } 30 \div 3 = 10$$

$$\text{Nenner: } 21 \div 3 = 7$$

Die 3 geht, also schreiben wir wieder um

$$\text{Zähler: } 30 = 3 \cdot 10$$

$$\text{Nenner: } 21 = 3 \cdot 7$$

und setzen ein:

$$\frac{30}{21} = \frac{3 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{3}{3} \cdot \frac{10}{7} = 1 \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{7}$$

Jetzt gibt es keine Zahlen mehr, durch die sich 10 und 7 teilen lassen, wir sind also fertig.

Das Kürzen lässt sich also in folgendem Formalismus beschreiben

**Kürzen von Brüchen**

- 1) Suche die kleinste Zahl, durch die sich Zähler und Nenner teilen lassen
- 2a) Wenn es keinen gemeinsamen Teiler gibt, bist Du fertig ☺.
- 2b) Wenn es eine gibt: Drücke Zähler und Nenner als Produkt dieser Zahl aus
- 3) Wirf die gefundene Zahl aus dem Bruch, nun hast Du einen neuen Bruch mit neuem Zähler und Nenner
- 4) Gehe wieder zum Schritt 1.

**Aufgaben**

Kürzen Sie folgende Zahlen, bis es nicht mehr geht:

a)  $\frac{36}{84}$       b)  $\frac{92}{216}$       c)  $\frac{48}{64}$       d)  $\frac{126}{144}$       e)  $\frac{96}{44}$       f)  $\frac{108}{81}$

**1.2.3.3 Aus Summen kürzen nur die Dummen..**

Bisher haben wir uns nur mit Brüchen beschäftigt, die lediglich eine Zahl im Zähler und Nenner haben. Wie sieht es aber aus, wenn dort Ausdrücke stehen? Nehmen wir folgenden Bruch:

$\frac{6+3}{3} = \frac{9}{3} = 3$ . Bitte kommen Sie nicht auf die Idee, die 3 direkt zu kürzen. Es hätte zur Folge, dass das Ergebnis

$$\frac{1+1}{1} = 2$$

wäre, was definitiv ungleich 3 ist.

Kürzen geht nur aus Produkten, nicht aus Summen! Mit einem Trick jedoch können wir aus der Summe im Zähler ein Produkt machen, indem wir das Distributivgesetz umdrehen und ausklammern:

$$\frac{6+3}{3} = \frac{3 \cdot (2+1)}{3}$$

Nun haben wir im Zähler ein Produkt, und das dürfen wir kürzen:

$$\frac{3 \cdot (2+1)}{3} = 2+1 = 3$$

Das ganze funktioniert natürlich auch mit einem Ausdruck im Nenner. Betrachten wir den Kehrwert des Beispielbruches:

$$\frac{3}{6+3} = \frac{3}{3 \cdot (2+1)} = \frac{1}{2+1}$$

Zusammenfassend gilt also:

*Aus Summen darf niemals gekürzt werden, nur aus Produkten – oder Aus Summen kürzen nur die Dummen!*

Natürlich können Sie jetzt anmerken, dass man ja zuerst die Summe ausrechnen kann und dann weiterrechnen kann. Wenn Sie nur Zahlen im Zähler und Nenner haben, ist das durchaus richtig. Aber in Ihrer Mathematikkarriere kann Ihnen durchaus auch einmal ein Bruch begegnen, der eine Variable  $x$  hat und so aussieht:

$\frac{5x+10}{5}$  - dann isses vorbei mit direktem Ausrechnen. Dann müssen Sie es machen, wie

beschrieben:

$$\frac{5x+10}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot (x+2)}{\cancel{5}} = x+2$$

#### 1.2.3.4 Die Primzahlanalyse

Die Anweisung im Formalismus zum Kürzen ‚Suche die kleinste Zahl, durch die sich Zähler und Nenner ausdrücken lassen‘, ist etwas komplexer, als man annehmen mag. Wie findet man diese Zahlen? Man kann herumprobieren, aber auch hier gibt es einen Formalismus, der einem dabei hilft.

Jede Zahl lässt sich als ein Produkt von Primzahlen ausdrücken. Primzahlen sind dabei Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, also

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Ob die 1 eine Primzahl ist, darüber streiten sich die Gelehrten ☺

Um einen Teiler zu finden, zerlegt man die Zahlen im Zähler und Nenner zuerst in ihre Primzahlen. Man fängt mit der 2 an und teilt die Zahl sooft durch 2, wie es geht. Immer, wenn es teilbar, schreibt man die gefunden Primzahl auf. Wenn es nicht mehr geht, nimmt man die nächste Primzahl, also die 3, die 5 usw. – immer sooft teilen, wie es geht. Am besten erstellt man dazu eine Tabelle, wie unten gezeigt. Das ganze macht man so lange, bis das Produkt der gefundenen Zahlen die Ursprungszahl ergibt oder am Ende eine 1 steht:

Nehmen wir vom obigen Beispiel den Zähler, die 60

Zahl	Geteilt durch (Primzahl)	Ergebnis	Gefundene Primzahl (Teiler)
60	2	30	2
30	2	15	2
15	2	geht nicht	-
	3	5	3
5	3	geht nicht	-
	5	1	5
1	Fertig		

Wenn wir alle Zahlen in der rechten Spalte multiplizieren, bei denen das Teilen geht, erhalten wir

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Machen wir das ganze für die 42:

Zahl	Geteilt durch (Primzahl)	Ergebnis	Gefundene Primzahl (Teiler)
42	2	21	2
21	2	Geht nicht	-
	3	7	3
7	3	Geht nicht	-
	5	Geht nicht	-
	7	1	7
1	Fertig		

Multiplizieren wir die gefundenen Primzahlen wieder auf, bekommen wir

$$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

Nun können wir die gefundenen Primzahlen gleich in unseren Bruch einsetzen:

$$\frac{60}{42} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7}$$

Nun kommt die Vereinfachung des Bruches: Zahlen, die im Zähler und im Nenner gleich sind, ergeben als einzelner Bruch geschrieben immer eine 1, die können wir also wegstreichen. Übrig bleibt dann der gekürzte Bruch

$$\frac{60}{42} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$$

Anmerkung zur Primzahlzerlegung: Sollten Sie für eine Zahl  $n$  keine Teiler finden, so können Sie bei  $\sqrt{n}$  aufhören. Da gilt:

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$$

und sie bis  $\sqrt{n}$  keinen Teiler gefunden haben, gibt es keinen. Gäbe es einen, der größer als  $\sqrt{n}$  ist, müsste er einen dazugehörigen Teiler haben, der dann kleiner als  $\sqrt{n}$  ist. Diesen haben Sie aber nicht gefunden, also ist  $n$  eine Primzahl.

**Aufgaben:**

Zerlegen Sie folgende Zahlen in ihre Primzahlfaktoren:

a) 84

b) 220

c) 315

d) 120

e) 256

f) 47

g) 317

**1.2.3.5 Teilbarkeitsregeln**

Um das Feststellen der Teilbarkeit zu vereinfachen, gibt es einige Handregeln, mit denen man testen kann, ob eine Zahl durch eine andere teilbar ist.

Eine Zahl ist durch **2** teilbar wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist (dann nennt man sie auch *grade*)

Eine Zahl ist durch **3** teilbar wenn der Quersumme der Ziffern auch durch 3 teilbar ist. Die Quersumme ist die Summe aller Ziffern zusammengezählt. Beispiel 534:  $5+3+4=12$ , 12 ist durch 3 teilbar, also ist 534 auch durch 3 teilbar. Ist die berechnete Quersumme noch zu unübersichtlich, bilden Sie von dieser wiederum die Quersumme. Bsp: 123456. Quersumme:  $1+2+3+4+5+6=21$ , davon die Quersumme  $2+1=3$  -> ist teilbar, also ist 123456 auch durch 3 teilbar.

Eine Zahl ist durch **4** teilbar wenn deren letzte 2 Ziffer durch 4 teilbar sind. Beispiel : 1984676 ist durch 4 teilbar weil 76 durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch **5** teilbar wenn sie mit 5 oder 0 endet.

Eine Zahl ist durch **6** teilbar wenn sie gerade ist UND wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Beispiel : 1872 ist gerade und die Quersumme  $1+8+7+2=18$  ist durch 3 teilbar, also ist 1872 durch 6 teilbar.

Für die Teilbarkeit durch **7** gibt es folgenden Test: Man nehme die letzte Ziffer weg, verdoppele sie und subtrahiere das Ergebnis von die verbliebene Ziffern. Ist das Ergebnis durch 7 teilbar, so war der Ausgangszahl auch durch 7 teilbar. Ist die Zahl, die dabei herauskommt, zu groß, um die Teilbarkeit abzusehen, wiederhole man den Vorgang mit der Zahl, die man nun hat. Beispiel: 826. Die Ziffer 6 nehmen und verdoppeln ergibt 12. 12 von den verbliebenen 82 subtrahieren, ergibt 70. 70 ist durch 7 teilbar, also ist 826 auch durch 7 teilbar.

Eine Zahl ist durch **8** teilbar wenn deren letzte 3 Ziffer durch 8 teilbar sind. Beispiel : 1984872 ist durch 8 teilbar weil 872 durch 8 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch **9** teilbar wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Beispiel 451872 hat die Quersumme  $4+5+1+8+7+2=27$ . 27 ist durch 9 teilbar, also ist 451872 auch durch 9 teilbar.

Eine Zahl ist durch **10** teilbar wenn sie mit 0 endet.

**Aufgaben:**

Durch was sind folgende Zahlen teilbar? Bestimmen Sie den Teiler anhand obiger Regeln:

- a) 90            b) 119            c) 104            d) 387

### 1.2.4 Das Addieren von Brüchen

Stellen Sie sich wieder ein Geburtstagskuchenproblem vor: Sie haben zwei gleiche Kuchen gehabt. Nach der Tortenschlacht ist von dem einen Kuchen noch ein Viertel übrig, von dem anderen noch ein Drittel. Wie viele Kuchen, bezogen auf einen ganzen Kuchen haben Sie noch?

Die Aufgabe lautet hier mathematisch formuliert:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = ?$$

Die entsprechenden Dezimalzahlen könnten Sie ohne Probleme aufaddieren:

$$0,25 + 0,\bar{3} = 0,58\bar{3}$$

(Denken Sie daran, dass der Strich über einer Zahl *Periode*, also unendliche Wiederholung bedeutet)

Um an die Lösung zu kommen, stellen Sie sich vor, beide Kuchen waren in 12 Stücke aufgeteilt. Jetzt berechnen wir mit dieser Information, wie viel Stücke Sie als Rest noch haben. Vom ersten Kuchen ist

noch  $\frac{1}{4}$  übrig, oder in Stücken ausgedrückt:

$$12 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Vom zweiten Kuchen sind damit noch

$$12 \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ Stücke zurückgeblieben.}$$

Wenn der Kuchen 12 Stücke hat, sind also 3 Stücke  $\frac{3}{12}$  und 4 Stücke  $\frac{4}{12}$  vom Kuchen. Was wir jetzt gemacht haben, ist die Brüche zu erweitern. Wir haben Sie dadurch nicht verändert:

$$\frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

und

$$\frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

Aber wenn wir nun probieren, sie zu addieren, geschieht folgendes:

$\frac{3}{12} + \frac{4}{12}$  können wir, wie bei der Multiplikation gesehen, wie folgt auffassen:

$$3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12}$$

und das können wir, unter Umkehrung des Distributivgesetzes, schreiben als

$(3+4) \cdot \frac{1}{12}$ . Diesen Vorgang nennt man *ausklammern* und ist die Umkehrung vom Multiplizieren einer Zahl mit einer Klammer. Jetzt können wir die Klammer berechnen und wieder als Bruch schreiben:

$$(3+4) \cdot \frac{1}{12} = 7 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \text{ und haben damit unsere Bruchaddition gelöst! Prüfen Sie mit dem}$$

Taschenrechner nach, ob es stimmt! Wir haben als noch  $\frac{7}{12}$  von einem Kuchen über oder 7 Stücke, wenn der Kuchen in 12 Stücke unterteilt war.

Wir konnten die Brüche addieren, da wir den Bruchanteil ausgeklammert haben, die Addition durchgeführt haben und wieder zu einem Bruch vereinigt haben. Fassen wir die ganzen letzten Rechnungen zusammen, erhalten wir

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Die Addition ging, weil nach erweitern beide Brüche den gleichen Nenner hatten. Also zusammenfassend:

*Um zwei Brüche zu addieren, müssen sie den gleichen Nenner haben. Haben Sie das nicht von alleine, müssen wir sie durch Erweitern so ändern, dass der Nenner von beiden gleich ist.*

Damit ist das Addieren von Brüchen etwas komplizierter als das Multiplizieren. Unter gar keinen Umständen darf man Nenner und Zähler addieren!

Sehen Sie selbst:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} = 0,583 \text{ (gerundet)}$$

aber, würde wir falsch addieren:

$$\frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7} = 0,286 \text{ (gerundet)}$$

Und das diese Zahlen völlig verschieden sind, sieht man ja sofort!

Die Subtraktion von Brüchen haben wir damit auch gleich erschlagen. Stellen sie sich vor, sie haben noch  $\frac{1}{3}$  Kuchen übrig und es wird  $\frac{1}{4}$  Kuchen gefuttert, dann haben Sie noch

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}, \text{ also ein Stück, wenn der Kuchen 12 Stücke hat.}$$

Um die Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen, müssen wir sie erweitern. Das ist auch als *gleichnamig machen* bekannt. Selbst der normale Sprachgebrauch kennt den Ausdruck *etwas auf den*

*gleichen Nenner bringen*, wenn Sie unterschiedliche Dinge vergleichen wollen. Genau das ist, was wir hier tun. Und damit werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

### 1.2.4.1 Das Gleichnamigmachen von Brüchen

Grade hatten wir Glück: Wir fanden die Zahl 12 als gemeinsamer Nenner, weil der Kuchen in 12 Stücke vorgegeben war. Normalerweise haben wir solch ein Glück nicht: Stellen Sie sich vor, sie sollen  $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$  lösen. Welche Eigenschaften muß nun der gemeinsame Nenner haben? Er soll eine

ganze Zahl sein, wir wollen keine Kommazahlen in unseren Brüchen haben. Wir suchen nun für jeden Bruch eine Zahl, mit der wir ihn erweitern können, um auf diese gemeinsamen Nenner zu kommen. Deshalb muß der gemeinsame Nenner durch 8 und durch 6 teilbar sein, denn durch das Erweitern wird der gemeinsame Nenner ja zu einem Vielfachen von 8 und einem Vielfachen von 6.

Die einfachste Möglichkeit ist, als gemeinsamen Nenner 6 und 8 zu multiplizieren, damit habe wir auf alle Fälle eine Zahl, die durch 6 und 8 teilbar ist. Also:

$$6 \cdot 8 = 48$$

Nun suchen wir die Zahlen zum Erweitern. Den ersten Bruch müssen wir mit 6 erweitern, damit er im Nenner 48 hat. Auf die 6 kommen wir, indem wir die 48 als neuen Nenner durch den alten Nenner 8 teilen.

$$\frac{3}{8} = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 8} = \frac{18}{48}$$

Den zweiten Bruch müssen wir mit 8 erweitern, da  $48 \div 6 = 8$  ist und bekommen

$$\frac{5}{6} = \frac{8 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{40}{48}$$

Nun haben wir die Brüche gleichnamig gemacht und können addieren:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{18}{48} + \frac{40}{48} = \frac{58}{48}$$

Und fertig.

Gucken wir nochmals genau hin, womit wir die Brüche erweitert haben. Um den ersten Bruch auf den Nenner 48 zu erweitern, haben wir ihn mit der Zahl im zweiten Nenner multipliziert – und andersherum. Da der neue Nenner das Produkt aus den Zahlen in beiden Nennern ist, erweitern wir jeden Bruch mit der Zahl im Nenner des anderen Bruches. Also ganz allgemein: Haben wir zwei

Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$ , erweitern wir den ersten mit  $d$  und den zweiten mit  $b$ , um auf den neuen Nenner  $b \cdot d$  zu kommen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b}$$

Schreiben wir in ein Schema, wie wir vorgegangen sind, um von nun an alle Brüche addieren zu können:

- 1) Wenn zwei Brüche addiert werden sollen, brauchen wir einen gemeinsamen Nenner.
- 2) Der gemeinsame Nenner kann berechnet werden, indem wir die einzelnen Nenner multiplizieren.
- 3) Um die Zahlen zum Erweitern zu finden, teilen für für jeden Bruch den neuen Nenner durch den alten Nenner. Mit dieser Zahl erweitern wir den jeweiligen Bruch.
- 4) Nun können wir die gleichnamigen Brüche addieren.

Diese Vorgehensweise gilt natürlich analog für die Subtraktion.

#### Aufgaben:

Lösen Sie folgende Additionen / Subtraktionen von Brüchen:

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$       b)  $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$       c)  $\frac{5}{5} + \frac{2}{2}$       d)  $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$       e)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$       f)  $\frac{8}{7} - \frac{7}{8}$

g)  $\frac{1}{7} + \frac{2}{9}$       h)  $\frac{1}{3} - \frac{4}{12}$       i)  $\frac{6}{7} - \frac{1}{5}$       j)  $\frac{4}{5} + \frac{3}{12}$       k)  $\frac{4}{2} - \frac{3}{8}$       l)  $\frac{5}{12} + \frac{3}{9}$

Können Sie auch folgende Aufgaben lösen? Probieren Sie, für alle drei Brüche einen gemeinsamen Nenner zu finden.

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}$       b)  $\frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{12}$       c)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{9}$

### 1.2.4.2 Das kleinste gemeinsame Vielfache

Wir haben gesehen, dass wir Brüche addieren können, wenn wir sie gleichnamig machen, indem wir die Nenner miteinander multiplizieren. Das ist aber noch nicht der Weisheit letzter Schluß. Wenn man mehrere Zahlen miteinander addieren will, kommt man, indem man alle Nenner multipliziert, recht schnell zu sehr großen Zahlen. Was tun?

Bei der Aufgabe, die wir gerechnet haben

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{18}{48} + \frac{40}{48} = \frac{58}{48}$$

erhalten wir einen Bruch, der noch gekürzt werden kann

$$\frac{58}{48} = \frac{29}{24}$$

Also scheint es noch einen kleineren gemeinsamen Nenner zu geben?

Sehen wir uns die beiden Nenner an, welche Reihen sie bilden. Schreiben wir das kleine 1x1 mit 6 und 8 jeweils untereinander:

6	8
12	16
18	24
24	32
30	40
36	48
42	56
48	64

Neben der 48 gibt es also noch ein weiteres gemeinsames Vielfaches, das sogar noch kleiner ist, die 24!

Mit dieser kann man auch als gemeinsamen Nenner arbeiten:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{29}{24}$$

Dazu müssen wir den ersten Bruch mit 3 erweitern ( $3 \cdot 8 = 24$ ) und den zweiten Bruch mit 4 ( $4 \cdot 6 = 24$ ).

Ein kleineres gemeinsames Vielfaches als 24 gibt es für die Zahlen 8 und 6 nicht.

Nun kann man, wenn man das kleinste gemeinsame Vielfache sucht, jeweils die Reihen der Zahlen nebeneinander schreiben und nach Übereinstimmungen suchen, wie wir es gemacht haben. Das kann bei mehreren Zahlen aber etwas langwierig sein. Also suchen wir ein mathematisches Verfahren dafür.

Zerlegen wir beide Zahlen in ihre Primzahlen:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

so sehen wir, dass beide aus 2 und drei bestehen, aber in unterschiedlichen Potenzen. Wenn wir beide Zahlen einfach multiplizieren, erhalten wir

$$8 \cdot 6 = \underbrace{2^3}_8 \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_6 = 48$$

Wir hatten gesehen, dass 24 das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 6 ist. 24 ergibt in der Primzahlanalyse

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Der Unterschied zwischen 48 und 24 ist genau der eine Faktor 2. Es reicht also, wenn wir jede Zahl in der Primzahlanalyse nur einmal betrachten, dafür aber in ihrer höchsten Potenz

Um das kleinste gemeinsame Vielfache zu finden, gehen wir wie folgt vor:

*Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachens (kgV)*

- 1) Führe für alle Zahlen eine Primzahlanalyse durch.
- 2) Multipliziere die höchsten Potenzen der Zahlen, die in der Primzahlanalyse vorkommen. Die kleineren Potenzen berücksichtige nicht.
- 3) Das Ergebnis der Multiplikation ist das kleinste gemeinsame Vielfache

Fassen wir nochmals zusammen: Das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 6 berechnen wir wie folgt:

1) Primzahlanalyse:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

2) Multiplizieren der höchsten Potenzen:

$$2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

Das ganze klappt natürlich auch für mehrere Zahlen. Wichtig ist, nur die höchsten Potenzen aller auftretenden Zahlen zu multiplizieren.

Sollten die Zahlen teilerfremd sein, dann ist das kgV gerade das Produkt beider Zahlen. Teilerfremd bedeutet, dass in der Primzahlanalyse keine gemeinsamen Zahlen auftreten, z.B. bei 5 und 6:

$$5 = 5 \cdot 1$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

Hier gibt es keine kleineren Potenzen, die wir weglassen können, also bleibt das kgV bei  $5 \cdot 6 = 30$

**Aufgaben:**

Berechne das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen

- a) 6 und 10    b) 4 und 6    c) 15 und 25    d) 21 und 27    e) 8 und 12    f) 15 und 9  
g) 2 und 3 und 8    h) 5 und 9 und 15    i) 63 und 21 und 42

### 1.2.4.3 Der Einsatz des kgV bei der Addition von Brüchen

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner können wir nun benutzen, um Brüche zu addieren. Mit dem kgV haben wir ja einen gemeinsamen Nenner.

Die Primzahlanalyse für alle Nenner kann nun etwas langwierig sein, besonders, wenn man mehrere Brüche addieren will. Hier eignet sich die Anwendung in Tabellenform.

Nehmen wir als Beispiel die Addition von

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{8}$$

Um den gemeinsamen Nenner zu finden, schreiben wir alle Nenner in eine Tabellenzeile:

Nenner	4	5	6	8
--------	---	---	---	---

Nun versuchen wir wieder, diese Nenner durch Primzahlen zu teilen, zuerst mit der 2: Wenn es geht, schreiben wir das Ergebnis unter die Zahl. Geht es nicht, übernehmen wir die Zahl aus der Zeile darüber:

Nenner	4	5	6	8
: 2 =	2	5	3	4

Bei der 4,6 und 8 ging es. Deshalb versuchen wir es weiter mit der 2 in der neuen Zeile – solange, bis sich keine Zahlen mehr teilen lassen:

Nenner	4	5	6	8
: 2 =	2	5	3	4
: 2 =	1	5	3	2

Bei der 8 ging es immer noch, also noch mal:

Nenner	4	5	6	8
: 2 =	2	5	3	4
: 2 =	1	5	3	2
: 2 =	1	5	3	1

Wie man sieht, steht jetzt in der untersten Zeile keine Zahl mehr, die durch 2 teilbar ist. Also gehen wir zur nächsten Primzahl, der 3.

Nenner	4	5	6	8
: 2 =	2	5	3	4
: 2 =	1	5	3	2
: 2 =	1	5	3	1
: 3 =	1	5	1	1

Jetzt steht keine Zahl mehr unten, die durch 3 teilbar ist. Also gehen wir zur nächsten Primzahl, der 5:

Nenner	4	5	6	8
: 2 =	2	5	3	4
: 2 =	1	5	3	2
: 2 =	1	5	3	1
: 3 =	1	5	1	1
: 5 =	1	1	1	1

Nun stehen in der untersten Zeile nur noch Einsen, es gibt also keine weitere Primzahl mehr zu teilen. Wir sind fertig.

Wir haben jetzt für alle Nenner die Primzahlanalyse in ‚einem Rutsch‘ durchgeführt. Das kleinste gemeinsame Vielfache lässt sich nun ganz fix bestimmen, indem man alle Zahlen in der linken Spalte (also die, durch die man geteilt hat) multipliziert:

$$kgV = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Damit haben wir unser kleinstes gemeinsames Vielfaches gefunden. Um die Brüche aufzuaddieren, müssen wir nun jeden Bruch auf den Nenner 120 erweitern. Dazu teilen wir 120 durch den alten Nenner und haben die Zahl zum Erweitern:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{8} &= \\ &= \frac{30 \cdot 3}{30 \cdot 4} + \frac{24 \cdot 2}{24 \cdot 5} + \frac{20 \cdot 5}{20 \cdot 6} + \frac{15 \cdot 1}{15 \cdot 8} = \\ &= \frac{90}{120} + \frac{48}{120} + \frac{100}{120} + \frac{15}{120} = \\ &= \frac{90 + 48 + 100 + 15}{120} = \\ &= \frac{253}{120} \end{aligned}$$

Fertig. Fassen wir das Ganze wieder in einem Schema zusammen:

**Addieren von Brüchen mit kgV**

- 1) Schreibe alle Nenner in die erste Zeile einer Tabelle.
- 2) Versuche nun alle Werte durch die kleinste Primzahl 2 zu teilen. Schreibe die 2 in die erste Spalte in eine neue Zeile.
- 3) Bei allen Spalten, bei denen es geht, schreibe das Ergebnis in die nächste Zeile. Bei der Spalten, bei denen es nicht geht, übernimm den Wert aus der letzten Zeile.
- 4) Wiederhole 3) das so lange, bis in der unteren Zeile keine Zahl mehr steht, die durch 2 teilbar ist.
- 5) Versuche es nun mit der nächsthöheren Primzahl, der 3. Schreibe die 3 ebenfalls in die erste Spalte in einer neuem Zeile.
- 6) Wiederhole 5), bis in der unteren Zeile keine Zahl mehr steht, die durch 3 teilbar ist. Wechsel zur nächsthöheren Primzahl.
- 7) Wiederhole das so lange, bis in der unteren Zeile nur noch Einsen stehen. Dann bist Du fertig.
- 8) Multipliziere alle Werte in der ersten Zeile. Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner ist nun das Ergebnis.
- 9) Teile für jeden Bruch das kgV durch den alten Nenner und erweitere jeden Bruch mit dieser Zahl.
- 10) Nun sind alle Brüche gleichnamig und Du kannst sie addieren.

Mir diesem Schema können Sie beliebig viele Brüche aufaddieren, ohne dass es dabei zu ‚Knoten im Hirn‘ kommt.

**Aufgaben:**

1) Berechnen sie folgende Summen:

$$\text{a) } \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \quad \text{b) } \frac{4}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{9} + \frac{2}{3} \quad \text{c) } \frac{4}{5} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \quad \text{d) } \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\text{e) } \frac{3}{6} - \frac{1}{8} + \frac{2}{12} - \frac{3}{4} \quad \text{f) } \frac{2}{6} + \frac{5}{8} + 1 \quad \text{g) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{h) } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

2) Sie kaufen auf einem Markt  $\frac{3}{4}$  kg Erdbeeren. Leider ist in dem angegebenen Gewicht das Gewicht

des Korbes enthalten, dieser wiegt  $\frac{1}{12}$  kg . Wie viele kg Erdbeeren haben Sie?

### 1.3 Besonderheiten bei Brüchen

Beim Bruchrechnen gibt es noch einige Besonderheiten, auf die wir bisher noch nicht eingegangen sind.

#### 1.3.1 Echte Brüche

Als *echten Bruch* bezeichnet man einen Bruch, bei dem der Zähler kleiner ist als der Nenner, also z.B.

$\frac{3}{4}$  oder  $\frac{5}{8}$ . Diese Brüche als Dezimalzahl ausgerechnet ergeben immer eine Zahl kleiner als 1.

$$\frac{3}{4} = 0,75 < 1$$

$$\frac{5}{8} = 0,625 < 1$$

#### 1.3.2 Unechte Brüche

Bei diesen Brüchen ist der Zähler größer als der Nenner, also z.B.  $\frac{5}{3}$  oder  $\frac{6}{4}$ . Unechte Brüche ergeben als Dezimalzahl immer eine Zahl größer 1.

$$\frac{5}{3} = 1,\bar{6} > 1$$

$$\frac{6}{4} = 1,5 > 1$$

#### 1.3.3 Gemischte Brüche:

Sie kennen bestimmt den Ausdruck *anderthalb*. Dieser Ausdruck wird mathematisch wie folgt wiedergegeben:

$1\frac{1}{2}$ . Ein solches Konstrukt aus einer ganzen Zahl und einem Bruch nennt man *gemischten Bruch*.

Und diese Dinge haben es in sich: Sie verstoßen nämlich gegen unsere bisher getroffenen Verabredungen.

Normalerweise bedeuten zwei Zahlen oder Ausdrücke nebeneinander ohne ein Rechenzeichen dazwischen, dass sie multipliziert werden sollen. Beispiel:  $5a = 5 \cdot a$  oder auch  $5km = 5 \cdot km$ . Die gemischten Brüche stellen hier eine Ausnahme dar: Diese Schreibweise bedeutet, dass die Zahl und der Bruch zu *addieren* sind!

Also bedeutet

$$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Gemischte Brüche lassen sich immer als ein unechter Bruch darstellen, indem die ganze

Zahl mit dem Bruch addiert wird. Bsp:  $2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Damit lässt sich auch jeder unechte Bruch als gemischter Bruch darstellen:

$$\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$$

Zum Umrechnen eines unechten Bruches benutzen Sie folgendes Schema:

- 1) bestimmen Sie, wie oft der Nenner ganz in den Zähler passt Bsp: bei  $\frac{13}{4}$  passt der Nenner 4 grade 3 mal ganz in den Zähler
- 2) multiplizieren Sie die Zahl aus 1) mit dem Nenner. Ergibt bei unserem Beispiel  $4 \cdot 3 = 12$
- 3) Ziehen Sie diese Zahl von dem Zähler ab und schreiben Sie sie als neuen Zähler. Bsp:  $13 - 12 = 1$ , der neue Zähler ist also 1
- 4) Der Nenner des neuen Bruches bleibt gleich, aber vor den Bruch schreiben Sie die Zahl aus 1)  
Also:  $3\frac{1}{4}$

Mathematisch korrekt formuliert zerlegen Sie den Zähler in eine Summe aus einem Vielfachen des Nenners und einen Rest. Den ersten Teil, das Vielfache des Nenners, rechnen Sie als ganze Zahl aus und schreiben sie vor den Bruch.

$$\frac{13}{4} = \frac{12+1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

**Aufgaben:**

1) Welche Brüche sind echt, welche unecht?

- a)  $\frac{1}{4}$       b)  $\frac{5}{4}$       c)  $\frac{125435}{125436}$       d)  $\frac{125436}{125435}$

2) Verwandeln Sie folgende gemischte Brüche in einen unechten Bruch:

- a)  $1\frac{1}{3}$       b)  $2\frac{4}{7}$       c)  $4\frac{2}{5}$       d)  $2\frac{1}{8}$       e)  $3\frac{5}{6}$

3) Verwandeln sie folgende unechte Brüche in einen gemischten Bruch

- a)  $\frac{7}{3}$       b)  $\frac{15}{7}$       c)  $\frac{11}{5}$       d)  $\frac{63}{8}$       e)  $\frac{25}{6}$

4) Für ein Gericht für 4 Personen brauchen Sie anderthalb Pfund Kartoffeln. Wieviel g Kartoffeln (als Bruchzahl) enthält jede Portion? (Anmerkung: 1 Pfund entspricht 0,5 kg entspricht 500 g)