

## Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.1.1.

### Aufgabe 65

- a. Zeigen Sie, dass  $(d_n) = (\frac{1}{10}n!)$  nicht beschränkt ist.  
b. Zeigen Sie, dass  $(e_n) = (\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})$  streng monoton wachsend ist.

### Lösungsvorschlag:

a.

**Annahme:**  $(d_n)$  ist beschränkt  $\Rightarrow$

es gibt  $K, L \in \mathbb{R}$  mit  $d_n \in [K; L]$  für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$d_n \leq L$  für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\frac{1}{10}n! \leq L$  für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$n! \leq 10L$  für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$n \leq 10L$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Setzt man  $L_1 = 10L$ , so erhält man mit  $n \leq L_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  einen **Widerspruch** zu A.1.1.4.

b.

Es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$e_n < e_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} \quad \text{ausmultiplizieren; binomische Formel} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n$$

Diese Ungleichung ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt!

### Aufgabe 66

Zeigen Sie mit Hilfe von A.1.1.5., dass für  $(a_n) = (\frac{1}{n^2})$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### Lösungsvorschlag:

Sei  $\varepsilon > 0$ .

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung:

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \frac{n^2}{\varepsilon} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$$

Nach A.1.1.4. gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{\varepsilon} < N$ . Für  $n \geq N$  gilt dann „erst recht“  $\frac{1}{\varepsilon} < n$ , wegen  $n \leq n^2$  folgt  $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$  und die Vorüberlegung liefert schließlich  $|a_n - 0| < \varepsilon$ .

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### Aufgabe 67

Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

a.  $(a_n) = \left( \frac{4n^2 + 6n - 17}{7n^2 + 3n + 5} \right)$     b.  $(b_n) = \left( \frac{n + \arctan(n)}{3n + 1} \right)$     c.  $(c_n) = ((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2})$

### Lösungsvorschlag:

a.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n - 17}{7n^2 + 3n + 5} \stackrel{\text{Erweitern mit } \frac{1}{n^2}}{=} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 6 \cdot \frac{1}{n} - 17 \cdot \frac{1}{n^2}}{7 + 3 \cdot \frac{1}{n} + 5 \cdot \frac{1}{n^2}} \stackrel{\text{GWS A.1.1.8.1./2.}}{=} =$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + 6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 17 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2}{7 + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 5 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2} \stackrel{\text{Beispiele zu A.1.1.5.}}{=} =$$

$$\frac{4 + 6 \cdot 0 - 17 \cdot 0^2}{7 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2} = \frac{4}{7}$$

b.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \arctan(n)}{3n + 1} \stackrel{\text{Erweitern mit } \frac{1}{n}}{=} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} \arctan(n)}{3 + \frac{1}{n}} \stackrel{\text{GWS A.1.1.8.1./2.}}{=} =$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \arctan(n)\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Beispiele zu A.1.1.5.}}{=} =$$

$$\frac{1 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3},$$

wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \arctan(n)\right) = 0$  nach GWS A.1.1.8.3. gilt, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  gilt und  $(\arctan(n))$

wegen  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \subseteq [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  beschränkt ist.

c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

gilt nach GWS A.1.1.8.3., da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$  gilt und  $((-1)^n)$  beschränkt ist.

### Aufgabe 68

Zeigen Sie mit Hilfe des Einschachtelungssatzes und unter Ausnutzung der bekannten

Resultate  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n + 2} = 1.$$

### Lösungsvorschlag:

Setze  $(a_n) = (\sqrt[n]{n})$ ,  $(b_n) = (\sqrt[n]{n^3 + n + 2})$ ,  $(c_n) = (\sqrt[n]{4n^3})$ . Dann gelten:

i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n^3} \stackrel{\text{GWS}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^3 = 1 \cdot 1^3 = 1.$

iii. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a_n = \sqrt[n]{n^{n^3+2}} \leq \sqrt[n]{n^3+n+2} = b_n.$$

iv. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt ferner:

$$b_n = \sqrt[n]{n^3+n+2} \stackrel{n \leq n^3, 2 \leq 2n^3}{\leq} \sqrt[n]{n^3+n^3+2n^3} = \sqrt[n]{4n^3} = c_n.$$

Aus i. – iv. folgt nach dem Einschachtelungssatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3+n+2} = 1.$$

### Aufgabe 69 mit Anregung zum Programmieren

Gegeben ist das folgende Programm ( dabei sollen eventuelle Probleme, die sich beim Überprüfen von Gleichheit und durch Rundung ergeben, ignoriert werden):

natürliche Zahl $p$ einlesen	
Vorgänger gleich 1 setzen	
Näherung gleich $p$ setzen	
Solange Näherung ungleich Vorgänger	
	Vorgänger gleich Näherung setzen
	Näherung durch $\frac{(\text{Näherung})^2 + p}{2 \cdot \text{Näherung}}$ ersetzen
Näherung ausgeben	

a. Vollziehen Sie den Verlauf des Programms für  $p = 3$  mit dem Taschenrechner oder Computer nach. Welche Zahl wird näherungsweise ( als „Näherung“ ) berechnet?

b. Zeigen Sie, dass für  $p \in \mathbb{N}$  die durch die folgende Vorschrift rekursiv definierte Folge  $(a_n)$

$$\text{I. } a_1 = p;$$

$$\text{II. } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergent ist mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{p}$ .

c. Welche Zahl wird also mit dem obigen Programm näherungsweise ( im Rahmen der Rechnergenauigkeit ) berechnet?

### Lösungsvorschlag:

a.

Rechnerabhängig; mein Taschenrechner hat Näherung  $= 1,732050808$  geliefert. Dies ist  $\sqrt{3}$  im Rahmen der Genauigkeit meines Taschenrechners.

b.

1. Nachweis von  $a_n \geq \sqrt{p}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\text{i. } a_1 \stackrel{\text{Rek. I}}{=} p \geq \sqrt{p}$$

$$\text{ii. } a_{n+1} \geq \sqrt{p} \stackrel{\text{Rek. II}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{a_n^2 + p}{2a_n} \geq \sqrt{p} \stackrel{2a_n > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$a_n^2 + p \geq 2\sqrt{p}a_n \stackrel{-2\sqrt{p}a_n}{\Leftrightarrow}$$

$$a_n^2 - 2\sqrt{p}a_n + p \geq 0 \quad \stackrel{2. \text{ binomische Formel}}{\Leftrightarrow}$$

$$(a_n - \sqrt{p})^2 \geq 0$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da Quadrate reeller Zahlen nie negativ sind.

2. Nachweis, dass  $(a_n)$  monoton fallend ist:

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \stackrel{\text{Rek. II}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{a_n^2 + p}{2a_n} \leq a_n \quad \stackrel{\cdot 2a_n > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$a_n^2 + p \leq 2a_n^2 \quad \stackrel{-a_n^2}{\Leftrightarrow}$$

$$p \leq a_n^2 \quad \stackrel{a_n > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{p} \leq a_n$$

Diese Ungleichung ist nach 1. erfüllt.

Beachten Sie, dass mit 1. und 2. auch  $\sqrt{p} \leq a_n \leq a_1 = p$  und daher  $a_n \in [\sqrt{p}; p]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt.

3. Bestimmung des Grenzwertes:

Nach 1. und 2. und A.1.1.10. ist  $(a_n)$  konvergent. Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  $a = ?$

**Entscheidender Trick:** Es ist auch  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ . Rek. II liefert dann:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \quad \stackrel{\text{Rek. II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + p}{2a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + p}{2a_n} \quad \stackrel{\text{GWS}}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + p)}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$\frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 + p}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \quad \stackrel{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a}{=} \frac{a^2 + p}{2a}$$

$$\frac{a^2 + p}{2a}$$

Wir erhalten also die Gleichung  $a = \frac{a^2 + p}{2a}$ , aus der wir nun  $a$  bestimmen können:

$$a = \frac{a^2 + p}{2a} \quad \stackrel{\cdot 2a > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$2a^2 = a^2 + p \quad \stackrel{-a^2}{\Leftrightarrow}$$

$$a^2 = p \quad \stackrel{\sqrt{\cdot}, a > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$a = \sqrt{p}.$$

c.

Das Programm berechnet  $\sqrt{p}$  näherungsweise (im Rahmen der Rechnergenauigkeit).