<u>Lösungsvorschlag für die Aufgabe zu Kapitel A.1.3.</u>

Aufgabe 71

Zeigen Sie für $(a_n) = (-n^2 + \tfrac{1}{2}n - 2)$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Lösungsvorschlag:

Sei $M \in \mathbb{R}$.

Vorüberlegung:

$$a_n < M \Leftrightarrow -n^2 + \tfrac{1}{2}n - 2 < M \overset{+2}{\Leftrightarrow} -n^2 + \tfrac{1}{2}n < M + 2 \overset{\cdot(-1)<0}{\Leftrightarrow} n^2 - \tfrac{1}{2}n > -M - 2 \qquad \boxed{*}$$

Es gilt $n^2 - \tfrac{1}{2}n \geq \tfrac{1}{2}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn:

$$n^2 - \tfrac{1}{2}n \geq \tfrac{1}{2}n \overset{+\frac{1}{2}n}{\Leftrightarrow} n^2 \geq n \overset{:n}{\Leftrightarrow} n \geq 1$$

Also ist $\boxed{*}$ sicher erfüllt, falls gilt:

$$\tfrac{1}{2}n > -M - 2 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} n > -2M - 4.$$

Nach A.1.1.4. gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $N > -2M - 4$. Für $n \geq N$ gilt dann „erst recht“ $n > -2M - 4$ und damit $a_n < M$ nach Vorüberlegung.

Also gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.