Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.1.4.

Aufgabe 72

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

I. Induktionsanfang: $n = 1$

$s_{2^n} = s_{2^1} = s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$

II. Induktionsvoraussetzung:

Für festes, beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch: $s_{2^{n+1}} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$s_{2^{n+1}} = \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \overset{\text{Summe aufteilen}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \overset{\text{IV}}{\geq}$$

$$1 + n \cdot \frac{1}{2} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \overset{\text{alle } 2^n \text{ Summanden der Summe sind } \geq \frac{1}{2^{n+1}}}{\geq}$$

$$1 + n \cdot \frac{1}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \overset{\text{kürzen}}{=}$$

$$1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overset{\text{zusammenfassen}}{=}$$

$$1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2}$$

Aufgabe 73 (ohne Parallelaufgabe in den Übungen)

Ein Sparer bringt zu Beginn eines jeden Jahres ein Kapital $K > 0$ auf sein Sparbuch. Zum Ende eines jeden Jahres werden 4 % Zinsen gutgeschrieben..

K_n sei das Kapital auf dem Sparbuch zu Ende des n. Jahres – vorausgesetzt, dass nichts abgehoben wird.

a. Bestimmen Sie K_n.

b. Berechnen Sie K_{10} für $K = 100$ GE (Geldeinheiten).

Lösungsvorschlag:

a. 1. Rekursive Beschreibung:

$\boxed{\text{I.}}$ $K_1 = K \cdot (1 + 0{,}04) = K \cdot 1{,}04$;

$\boxed{\text{II.}}$ $K_n = (K_{n-1} + K) \cdot (1 + 0{,}04) = (K_{n-1} + K) \cdot 1{,}04$ für $n \geq 2$.

2. Nicht rekursive Beschreibung: $K_n = K \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}04^i$.

Nachweis mit Hilfe von 1. und Induktion (Kurzform):

I. $n = 1$: $K_n = K_1 \overset{\text{Rek. I}}{=} K \cdot 1{,}04 = K \cdot \sum_{i=1}^{1} 1{,}04^i = K \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}04^i$.

II. $n \to n+1$: $K_{n+1} \overset{\text{Rek. II}}{=} (K_n + K) \cdot 1{,}04 \overset{\text{IV}}{=} (K \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}04^i + K) \cdot 1{,}04 = K \cdot \sum_{i=0}^{n} 1{,}04^{i+1} = K \cdot \sum_{i=1}^{n+1} 1{,}04^i$

3. <u>Berechung von</u> K_n <u>mit Hilfe von A.1.4.3</u>.:

$$K_n = K \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}04^i = K \cdot 1{,}04 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}04^{i-1} = K \cdot 1{,}04 \cdot \tfrac{1-1{,}04^n}{1-1{,}04} = K \cdot 1{,}04 \cdot 25 \cdot (1{,}04^n - 1) = 26K \cdot (1{,}04^n - 1).$$

c. $K_{10} = 2600 \cdot (1{,}04^{10} - 1) \cong 1248{,}64$ GE.

Aufgabe 74

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Summe:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i-1}$; b. $\sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i}$; c. $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i}$; d. $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{7}{6})^{i-1}$; e. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot (\tfrac{3}{4})^{i-1}$; f. $\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{3^{i-1}+1}{4^i}$.

Lösungsvorschlag:

a.

Wegen $\left|\tfrac{3}{4}\right| < 1$ ist $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i-1}$ konvergent mit Summe $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i-1} = \tfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

b.

Wegen $\sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i} = \sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i-1}$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i}$ nach a. konvergent mit Summe $\sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i} = 4$.

c.

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i} = \sum_{i=0}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i} - 1$ ist $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i}$ nach b. konvergent mit Summe $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i} = 4 - 1 = 3$.

d.

Wegen $\left|\tfrac{7}{6}\right| \geq 1$ ist $\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{7}{6})^{i-1}$ divergent.

e.

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot (\tfrac{3}{4})^{i-1} = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\tfrac{3}{4})^{i-1}$ und $\left|-\tfrac{3}{4}\right| < 1$ ist $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot (\tfrac{3}{4})^{i-1}$ konvergent mit Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot (\tfrac{3}{4})^{i-1} = -\sum_{i=1}^{\infty} (-\tfrac{3}{4})^{i-1} = -\tfrac{1}{1-(-\frac{3}{4})} = -\tfrac{4}{7}.$$

f.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{3^{i-1}+1}{4^i} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^{i-1} + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^{i-1}) \overset{\text{A.1.4.5}}{=}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{i-1}}_{\text{konvergent, da } \left|\frac{3}{4}\right|<1} + \tfrac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^{i-1}}_{\text{konvergent, da } \left|\frac{1}{4}\right|<1} \overset{\text{A.1.4.3.}}{=}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{3}{4}} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{3} =$$

$$1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}.$$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i-1}+1}{4^i}$ ist also konvergent mit Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i-1}+1}{4^i} = \frac{4}{3}$.

Aufgabe 75

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$; b. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$; c. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3}}$; d. $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3i})^i$; e. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!}$; f. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{i!}$.

Lösungsvorschlag:

a.

Sei $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte ferner $b_n = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn:

$$a_n \leq b_n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \overset{\cdot n^2 \cdot (n+1)^2}{\Leftrightarrow}$$

$$n^2 \leq (n+1)^2 \overset{\text{binomische Formel}}{\Leftrightarrow}$$

$$n^2 \leq n^2 + 2n + 1 \overset{-n^2}{\Leftrightarrow}$$

$$0 \leq 2n + 1$$

Außerdem ist $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ nach Beispiel 2. zu A.1.4.1. konvergent.

Nach dem Vergleichskriterium ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$ also konvergent.

b.

Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte ferner $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn:

$$a_n \leq b_n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \overset{\cdot n \cdot \sqrt[3]{n}}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt[3]{n} \leq n \overset{(\ldots)^3}{\Leftrightarrow}$$

$$n \leq n^3 \overset{:n}{\Leftrightarrow}$$

$$1 \leq n^2$$

Außerdem ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ nach A.1.4.2. divergent.

Nach dem Vergleichskriterium ist $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$ also divergent.

c.

Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$.

Nach A.1.4.4. ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3}}$ also divergent.

d.

Sei $a_n = \left(\frac{1}{3n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3n}\right)^n} \overset{\text{Wurzel ausrechnen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} \overset{\text{GWS}}{=}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 < 1 .$$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3i}\right)^i$ also konvergent.

e.

Sei $a_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}} \overset{\text{Doppelbruch auflösen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{3^n \cdot (n+2)!} \overset{3^{n+1}=3\cdot 3^n;(n+2)!=(n+2)\cdot(n+1)!}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (n+1)!}{3^n \cdot (n+2) \cdot (n+1)!} \overset{\text{kürzen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} \overset{\text{GWS}}{=}$$

$$3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 3 \cdot 0 = 0 < 1 .$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!}$ also konvergent.

f.

Sei $a_n = \frac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \overset{\text{Doppelbruch auflösen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} \overset{(n+1)!=(n+1)\cdot n!;(n+1)^{n+1}=(n+1)\cdot(n+1)^n}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot n^n} \overset{\text{kürzen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \overset{\text{Potenzgesetze}}{=}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \overset{\text{Bruch umformen}}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$.

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{i!}$ also divergent.

Aufgabe 76

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\frac{4}{2i-1}$ ist nach dem Leibnizkriterium konvergent. Wir werden später sehen, dass die Summe $s = \pi$ ist.

Bestimmen Sie s_{10} als Näherungswert für $s = \pi$ und schätzen Sie den absoluten Fehler $|s - s_{10}|$ ab.

Lösungsvorschlag:

Wir setzen $a_n = \frac{4}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\frac{4}{2i-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 10$ gilt insbesondere

$s_{10} = \sum\limits_{i=1}^{10} (-1)^{i-1} a_i = \sum\limits_{i=1}^{10} (-1)^{i-1}\frac{4}{2i-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} \cong 3{,}041839619$.

Zur Abschätzung des absoluten Fehlers nach A.1.4.8.2.b. :

$|s - s_{10}| \le a_{11} = \frac{4}{21} \cong 0{,}1904761905$.

Aufgabe 77

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz und Konvergenz:

a. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\frac{1}{(2i-1)\cdot 2^{2i-1}}$; b. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\frac{1}{2i-1}$; c. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} i^k$.

Lösungsvorschlag:

a.

Sei $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann gilt:

$s = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}}{(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}}\right| \overset{\text{Doppelbruch auflösen}}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}{(-1)^{n-1}\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\right| \overset{(-1)^n=-(-1)^{n-1};\,2^{2n+1}=4\cdot 2^{2n-1}}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}{(-1)^{n-1}\cdot(2n+1)\cdot 4\cdot 2^{2n-1}}\right| \overset{\text{kürzen}}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-(2n-1)}{(2n+1)\cdot 4}\right| \overset{\text{Betrag ausrechnen}}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{8n+4} \overset{\text{Bruch umschreiben}}{=}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{8+\frac{4}{n}} \overset{\text{GWS}}{=}$
$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} < 1$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{(2i-1)\cdot 2^{2i-1}}$ ist also absolut konvergent und damit erst recht konvergent.

b.

Sei $b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$, $c_n = \frac{1}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i. Da (c_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}$ nach dem Leibnizkriterium konvergent.

ii. $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}$ ist dagegen nicht absolut konvergent:

Setze $d_n = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$|b_n| = c_n = \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n} = d_n$.

Da $\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert, ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ nach dem Vergleichskriterium divergent und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}$ konvergiert nicht absolut.

c.

Betrachtet wird $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_n = \frac{1}{2n+1} \cdot i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i. Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2k+1} \cdot i^k \right| \overset{\text{Rechenregeln für Beträge}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2k+1} \right| \cdot |i|^k \overset{\text{Beträge ausrechnen}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$.

Diese Reihe ist wegen $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{3n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Divergenz von $\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nach dem Vergleichskriterium divergent. Damit ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent.

ii. Zur Untersuchung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz bestimmen wir Real – und Imaginärteil der Reihe.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot i^k =$
$\frac{1}{3} \cdot i - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdot i + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \cdot i - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdot i + \frac{1}{17} \ldots =$
$-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4k+1} + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4k-1}$.

Die Real- und Imaginärteilreihen $-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4k+1}$ bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4k-1}$ sind nach dem Leibnizkriterium konvergent; nach A.1.2.2. ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot i^k$ damit konvergent.