

## Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.1.5.

### Aufgabe 78

Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich  $M \subseteq \mathbb{R}$  für  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

a.  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} x^{2i-1}$ ;      b.  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1}$ .

### Lösungsvorschlag:

a.

- Sonderfall:

Für  $x = 0$  gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} x^{2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} 0^{2i-1} = 0$ . Es liegt also ( absolute ) Konvergenz vor.

• Sei nun  $x \neq 0$ . Dann ist  $b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \neq 0$  und wir können mit dem Quotientenkriterium für absolute Konvergenz arbeiten.

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| & \stackrel{\text{Doppelbruch auflösen}}{=} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot (2n-1)}{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} \cdot (2n+1)} \right| & \stackrel{x^{2n+1} = x^2 \cdot x^{2n-1}; (-1)^n = -(-1)^{n-1}}{=} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(-1)^{n-1} \cdot x^2 \cdot x^{2n-1} \cdot (2n-1)}{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} \cdot (2n+1)} \right| & \stackrel{\text{kürzen}}{=} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-x^2 \cdot (2n-1)}{2n+1} \right| & \stackrel{\text{Betrag ausrechnen}}{=} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x^2 \frac{2n-1}{2n+1} \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x^2 \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \right) & \stackrel{\text{GWS}}{=} x^2. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also für  $|x| < 1$  absolut, für  $|x| > 1$  divergiert sie.

- Sei nun  $|x| = 1$ .

Für  $x = 1$  erhält man die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} x^{2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}$ ; diese ist nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Für  $x = -1$  erhält man die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} x^{2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} (-1)^{2i-1} = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i-1}$ ; diese ist ebenfalls nach dem Leibnizkriterium konvergent.

- Man kann also  $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1} x^{2i-1}$  definieren, d. h.

$$M = [-1; 1].$$

b.

- Sonderfall:

Für  $x = 0$  gilt  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} 0^{2i+1} = 0$ . Es liegt also ( absolute ) Konvergenz vor.

- Sei nun  $x \neq 0$ . Dann ist  $c_n = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \neq 0$  und wir können mit dem Quotientenkriterium für absolute Konvergenz arbeiten.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| \begin{array}{l} \text{Doppelbruch auflösen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+3} \cdot (2n+1)!}{(-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot (2n+3)!} \right| \begin{array}{l} x^{2n+3} = x^2 \cdot x^{2n+1}; (-1)^{n+1} = -(-1)^n; (2n+3)! = (2n+3) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)! \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(-1)^n \cdot x^2 \cdot x^{2n+1} \cdot (2n+1)!}{(-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot (2n+3) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)!} \right| \begin{array}{l} \text{kürzen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-x^2}{(2n+3) \cdot (2n+2)} \right| \begin{array}{l} \text{Betrag ausrechnen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+3) \cdot (2n+2)} = 0 < 1.$$

Damit ist  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1}$  auch für  $x \neq 0$  stets absolut konvergent.

- Man kann also  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1}$  definieren, d.h.  $M = \mathbb{R}$ .

Wir werden später sehen, dass diese Funktion die Sinusfunktion ist! (vgl. A.1.5.8.)

### Aufgabe 79

Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition A.1.5.1. den Konvergenzradius der folgenden komplexen Potenzreihen:

a.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} z^i$ ;                      b.  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i (z-3)^i$ .

### Lösungsvorschlag:

a.

Setze  $b_n = \frac{1}{n^3} z^n$ , dann liefert das Wurzelkriterium für absolute Konvergenz:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^3} z^n \right|} \begin{array}{l} \text{Betrag ausrechnen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3} |z|^n} \begin{array}{l} n. \text{ Wurzel ausrechnen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} |z| = |z|.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe für  $|z| < 1$  absolut; für  $|z| > 1$  divergiert sie.

Der Konvergenzradius ist also  $R = 1$ .

b.

Setze  $c_n = 2^n (z-3)^n$ , dann liefert das Wurzelkriterium für absolute Konvergenz:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| 2^n (z-3)^n \right|} \begin{array}{l} \text{Betrag ausrechnen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n |z-3|^n} \begin{array}{l} n. \text{ Wurzel ausrechnen} \\ = \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 |z-3| = 2 |z-3|.$$

Es gilt:

$$2|z-3| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 2|z-3| > 1 \Leftrightarrow |z-3| > \frac{1}{2}.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe für  $|z-3| < \frac{1}{2}$  absolut; für  $|z-3| > \frac{1}{2}$  divergiert sie.

Der Konvergenzradius ist also  $R = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 80

Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel von Cauchy – Hadamard für die folgenden reellen Potenzreihen den Konvergenzradius  $R$ :

a.  $\sum_{i=1}^{\infty} 5^i x^i$ ;                      b.  $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{(i^2)} x^i$ ;                      c.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{i^i} x^i$ .

### Lösungsvorschlag:

a.

Sei  $a_n = 5^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n|} \quad \text{Betrag ausrechnen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} \quad n. \text{ Wurzel ausrechnen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5. \end{aligned}$$

Es folgt:  $R = \frac{1}{r} = \frac{1}{5}$ .

b.

Sei  $a_n = 2^{(n^2)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{|2^{(n^2)}|} = \sqrt[n]{2^{n \cdot n}} = \sqrt[n]{2^{n \cdot n}} = \sqrt[n]{(2^n)^n} = 2^n \quad \text{unbeschränkt und damit} \\ R &= 0. \end{aligned}$$

c.

Es ist  $a_n = \frac{n!}{n^n} \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und wir erhalten:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| \quad \text{Doppelbruch auflösen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} \right| \quad \begin{matrix} (n+1)! = (n+1) \cdot n! \\ (n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n \end{matrix} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)n! n^n}{(n+1)(n+1)^n n!} \right| \quad \text{kürzen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| \quad \text{Betrag ausrechnen, Potenzgesetze} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \quad \text{Bruch umschreiben} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \quad \text{Potenzgesetze} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \stackrel{\text{GWS}}{=} \frac{1}{e}.$$

Es folgt:  $R = \frac{1}{r} = e$ .

### Aufgabe 81

Berechnen Sie die folgenden Reihensummen:

a.  $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i \cdot \frac{1}{i!};$       b.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{i!};$       c.  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{i!}.$

### Lösungsvorschlag:

a.

$$\sum_{i=0}^{\infty} 3^i \cdot \frac{1}{i!} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot 3^i =$$

$$\exp(3) =$$

$$\exp(3 \cdot 1) \stackrel{\text{A.1.5.4.5.}}{=} =$$

$$\exp(1)^3 \stackrel{\text{A.1.5.4.1.}}{=} =$$

$$e^3.$$

b.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{i!} \stackrel{\text{A.1.4.5.}}{=} =$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} =$$

$$3 \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} - 1 \right) =$$

$$3 \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot 1^i - 1 \right) =$$

$$3 \cdot (\exp(1) - 1) \stackrel{\text{A.1.4.5.1.}}{=} =$$

$$3 \cdot (e - 1).$$

c.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{i!} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \stackrel{\text{A.1.4.5.}}{=} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \stackrel{\text{in der 1. Summe } i! = i \cdot (i-1)! \text{ setzen und kürzen}}{=} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \stackrel{\text{1. Summe umnummerieren}}{=} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} =$$

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \quad \text{Argument wie bei b.} =$$

$$2e.$$

### Aufgabe 82

Schreiben Sie als einen Logarithmus:  $2 \cdot \ln(x^2 - y^2) - \ln((x - y)^2) + \ln(2)$ .

#### Lösungsvorschlag:

$$2 \cdot \ln(x^2 - y^2) - \ln((x - y)^2) + \ln(2) \stackrel{\text{A.1.5.5.3./5.}}{=} \ln((x^2 - y^2)^2) + \ln\left(\frac{1}{(x - y)^2}\right) + \ln(2) \stackrel{\text{A.1.5.5.2.}}{=} \ln\left(\frac{(x^2 - y^2)^2 \cdot 2}{(x - y)^2}\right) \stackrel{\text{3. binomische Formel}}{=} \ln\left(\frac{(x - y)^2 (x + y)^2 \cdot 2}{(x - y)^2}\right) \stackrel{\text{kürzen}}{=} \ln(2 \cdot (x + y)^2).$$

### Aufgabe 83 ( Tüftelaufgabe )

Zeigen Sie für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \quad \text{und}$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y).$$

#### Lösungsvorschlag:

$$\cos(x + y) + i \cdot \sin(x + y) \stackrel{\text{Eulerformel}}{=} \exp(i \cdot (x + y)) = \exp(i \cdot x + i \cdot y) \stackrel{\text{A.1.5.7.1.}}{=} \exp(i \cdot x) \cdot \exp(i \cdot y) \stackrel{\text{Eulerformel}}{=} (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \stackrel{\text{Multiplikation komplexer Zahlen}}{=} (\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)) + i \cdot (\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y))$$

Schaut man nur auf Anfang und Ende der Rechnung und vergleicht Real – und Imaginärteil, so erhält man die Behauptungen

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \quad \text{und}$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y).$$

### Aufgabe 84

Berechnen Sie die folgenden Funktionswerte der komplexen Exponentialfunktion.

a.  $\exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot i\right)$ ;      b.  $\exp\left(2 + \frac{\pi}{3} \cdot i\right)$ .

Die Ergebnisse sind stets genau in Normalform anzugeben.

## Lösungsvorschlag:

a.

$$\exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot i\right) \stackrel{\text{Eulerformel}}{=} =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot i \stackrel{\text{Tabelle}}{=} =$$

$$0 + 1 \cdot i =$$

$$i.$$

b.

$$\exp\left(2 + \frac{\pi}{3} \cdot i\right) \stackrel{\text{A.1.5.7.1.}}{=} =$$

$$\exp(2) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{3} \cdot i\right) \stackrel{\text{Eulerformel}}{=} =$$

$$e^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot i\right) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} =$$

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right) =$$

$$\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} \cdot i.$$