Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.2.1.

Aufgabe 85

$f:[0;2]\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x)=\begin{cases}0 & \text{falls } 0\le x<1;\\ 1 & \text{falls } 1\le x<2;\\ 2 & \text{falls } x=2.\end{cases}$

f beschreibt das „Abschneiden" der Nachkommastellen – viele Programmiersprachen liefern etwas Vergleichbares!
Untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert. Ist f in $x_0=1$ stetig?

Lösungsvorschlag:
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht, denn:
Annahme: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert doch; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=c$.
a. Betrachte zunächst $(x_n)=(1)$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$.

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\overset{1\le x_n<2}{=}\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$ folgt $c=1$.
b. Betrachte nun $(\tilde{x}_n)=(1-\frac{1}{n})$,

dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})\overset{\text{GWS}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$.

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n)\overset{0\le x_n<1}{=}\lim\limits_{n\to\infty} 0=0$ folgt $c=0$.
Aus a. und b. folgt $1=c=0$ und mit $1=0$ erhält man einen **Widerspruch**.
f ist nach den obigen Überlegungen in $x_0=1$ nicht stetig.

Aufgabe 86
Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.1.1., dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ stetig ist.

Lösungsvorschlag:
Wir zeigen, dass f in jedem $x_0\in\mathbb{R}$ stetig ist.
Sei also $x_0\in\mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Dann folgt:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^3+4x_n^2+6x_n+2)\overset{\text{GWS}}{=}$

$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^3+4\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2+6\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\lim\limits_{n\to\infty} 2\overset{\lim_{n\to\infty} x_n=x_0}{=}$

${x_0}^3+4\cdot {x_0}^2+6\cdot x_0+2=$

$f(x_0)$.

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ ist f in x_0 stetig.

Aufgabe 87
$f:[1;2]\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x)=x^4-4x+1$.
a. Begründen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle x_0 hat. Man kann zeigen, dass x_0 eindeutig bestimmt ist.

b. Bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren einen Näherungswert r von x_0 mit $|r - x_0| < 0,2$.

Lösungsvorschlag:

a.

f ist als Polynomfunktion stetig mit $f(1) = -2 < 0$ und $f(2) = 9 > 0$. Also hat f nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle x_0.

a.

Setze in A.2.1.6. $a = 1$ und $b = 2$; f ist stetig mit $f(a) \cdot f(b) = f(1) \cdot f(2) = -18 < 0$.

Setze ferner $\varepsilon = 0,2$.

<u>Protokoll der weiteren Schritte</u>:

((+) bzw. (-) gibt an, ob der Funktionswert positiv oder negativ ist.)

Schleife Nr.	c	a	b	$\lvert a - b \rvert$
-	-	1 (-)	2 (+)	1
1	1,5 (+)	1 (-)	1,5 (+)	0,5
2	1,25 (-)	1,25 (-)	1,5 (+)	0,25
3	1,375 (-)	1,375 (-)	1,5 (+)	0,125

Setze $r = 1{,}375$.