

Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.2.2.

Aufgabe 88

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ mit Hilfe der Definition A.2.2.1. auf Differenzierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Typ: $x^3 - x_0^3 = (x - x_0) \cdot (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)$.

Lösungsvorschlag:

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \stackrel{\text{Typ}}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \stackrel{\text{kürzen}}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2) \stackrel{\text{Polynome sind stetig}}{=} =$$

$$x_0^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2 =$$

$$3x_0^2.$$

Damit ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Kurznotation: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$.

Aufgabe 89

a. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = x^n \Rightarrow f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

b. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$. Berechnen Sie $h'(x)$.

Lösungsvorschlag:

a.

Induktion in Kurznotation!

I. $n = 1$:

$$f_n(x) = f_1(x) = x^1 = x \stackrel{\text{Beispiel 2. zu A.2.2.1.}}{\Rightarrow}$$

$$f_n'(x) = f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot x^{1-1} = n \cdot x^{n-1}$$

II. $n \rightarrow n+1$:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot f_1(x) \Rightarrow$$

$$f_{n+1}'(x) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} =$$

$$f_n'(x) \cdot f_1(x) + f_n(x) \cdot f_1'(x) \stackrel{\text{IV, IA}}{=} =$$

$$n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \stackrel{\text{Potenzgesetze}}{=} =$$

$$n \cdot x^n + x^n =$$

$$(n+1) \cdot x^n.$$

b.

Es gilt $h = \frac{f}{g}$ mit $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$.

Mit $f'(x) = 2x + 1$ und $g'(x) = 2x$ folgt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{f}{g} \right)' (x) \stackrel{\text{Quotientenregel}}{=} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \\ &= \frac{(2x+1) \cdot (x^2+1) - (x^2+x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 90

Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.2.5.: $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$.

Lösungsvorschlag:

Mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i)!} x^{2i}$ (vgl. A.1.5.8.5.) folgt nach A.2.2.5.:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i)!} \cdot 2i \cdot x^{2i-1} \stackrel{(2i)! = 2i \cdot (2i-1)!}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i \cdot (2i-1)!} \cdot 2i \cdot x^{2i-1} \stackrel{2i \text{ kürzen}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i-1)!} \cdot x^{2i-1} \stackrel{\text{umnummerieren}}{=} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{(2i+1)!} \cdot x^{2i+1} \stackrel{(-1)^{i+1} = -(-1)^i}{=} \\ &= -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} \cdot x^{2i+1} = -\sin(x) \quad (\text{vgl. A.1.5.8.5.}) \end{aligned}$$

Aufgabe 91

Zeigen Sie mit Hilfe von A.2.2.6.: $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für alle $x \in]0; \infty[$.

Tipp : Betrachten Sie $f :]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit $f(x) = x^2$ und beachten Sie $g = f^{-1}$.

Lösungsvorschlag:

$f :]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit $f(x) = x^2$

hat die Umkehrfunktion

$f^{-1} :]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Für $x \in]0; \infty[$ gilt:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2 \cdot f^{-1}(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \neq 0 \quad \text{für } x \in]0; \infty[.$$

Also folgt für $x \in]0; \infty[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Kurz: } g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ für } x \in]0; \infty[.$$

Aufgabe 92

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Vorschriften:

a. $h(x) = \sin(x^3 + 5)$; b. $h(x) = \sin^3(x + 5)$.

Lösungsvorschlag:

a.

Es gilt $h = f \circ g$ mit

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x^3 + 5.$$

Differenzieren von f und g ergibt:

$$f'(x) = \cos(x), \quad g'(x) = 3x^2.$$

Die Kettenregel liefert damit:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^3 + 5) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos(x^3 + 5).$$

b.

Es ist $h = f \circ g \circ k$ mit

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin(x), \quad k(x) = x + 5.$$

Differenzieren von f , g und k ergibt:

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = \cos(x), \quad k'(x) = 1.$$

Die Kettenregel liefert damit:

$$h'(x) = f'(g(k(x))) \cdot g'(k(x)) \cdot k'(x) = 3 \sin^2(x + 5) \cdot \cos(x + 5) \cdot 1 = 3 \sin^2(x + 5) \cdot \cos(x + 5).$$

Aufgabe 93

Differenzieren Sie unter Ausnutzung der Tabelle wichtiger Ableitungen und der Ableitungsregeln die Funktionen mit den folgenden Vorschriften; vereinfachen Sie das Ergebnis nach Möglichkeit:

a. $f(x) = x \cdot \ln(x)$; b. $f(x) = \ln(x \cdot \cos(x))$; c. $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2}))$.

Lösungsvorschlag:

a.

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

b.

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \cos(x)} \cdot (1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x))) = \frac{1}{x} - \tan(x).$$

c.

$$f'(x) = \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Aufgabe 94

$$f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sei definiert durch } f(x) = 3 \cdot (2x - 1)^{-1}.$$

a. Berechnen Sie $f^{(n)}(x)$ für $n = 1; 2; 3$.

b. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2x-1)^{-(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag:

a.

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = -3 \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2 = -6 \cdot (2x-1)^{-2};$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 12 \cdot (2x-1)^{-3} \cdot 2 = 24 \cdot (2x-1)^{-3};$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = -72 \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2 = -144 \cdot (2x-1)^{-4}.$$

b.

Nachweis durch vollständige Induktion in Kurzform:

I. $n=1$:

$$f^{(n)}(x) = f^{(1)}(x) \stackrel{\text{s.o.}}{=} -6 \cdot (2x-1)^{-2} = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 2^1 \cdot 1! \cdot (2x-1)^{-(1+1)} = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2x-1)^{-(n+1)}$$

II. $n \rightarrow n+1$:

Nach IV gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2x-1)^{-(n+1)}.$$

Differenzieren liefert:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (-(n+1))(2x-1)^{-(n+1)-1} \cdot 2 = (-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (2x-1)^{-(n+2)}.$$