Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel A.2.3.

Aufgabe 95

$f:]-1;\infty[\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.
Bestimmen Sie das 3. Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0=0$.

Lösungsvorschlag:
Berechnung der benötigten Ableitungen und der zugehörigen Funktionswerte an der Stelle $x_0=0$:

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{3}}$	$f(x_0)=f(0)=1$
$f'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$	$f'(x_0)=f'(0)=\frac{1}{3}$
$f''(x)=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$	$f''(x_0)=f''(0)=-\frac{2}{9}$
$f'''(x)=\frac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}}$	$f'''(x_0)=f'''(0)=\frac{10}{27}$

Also:

$$p_3(x)=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{i!}f^{(i)}(0)x^i=\frac{1}{0!}\cdot 1\cdot x^0+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^1+\frac{1}{2!}\cdot(-\frac{2}{9})\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{10}{27}\cdot x^3=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3.$$

Aufgabe 96

a. Zeigen Sie: $\sqrt[3]{28}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$.

b. Berechnen Sie mit Hilfe des Resultats von Aufgabe 95 einen Näherungswert für $\sqrt[3]{28}$ und schätzen Sie den absoluten Fehler mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange ab.

Lösungsvorschlag:
a.

$$\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27+1}=\sqrt[3]{27(1+\frac{1}{27})}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}.$$

b.
Für $f:]-1;\infty[\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ hat das 3. Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0=0$ nach Aufgabe 95 die Vorschrift $p_3(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3$.
Damit folgt

$$\sqrt[3]{28}\overset{\text{a.}}{=}3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}=3\cdot f(\tfrac{1}{27})\cong 3\cdot p_3(\tfrac{1}{27})=3\cdot(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{9}\cdot(\tfrac{1}{27})^2+\tfrac{5}{81}\cdot(\tfrac{1}{27})^3)\cong 3{,}036589198.$$

Fehlerabschätzung nach Lagrange:
Es gibt $\tilde{x}\in[0;\frac{1}{27}]$ mit

$$3\cdot\left|R_4(\tfrac{1}{27})\right|=3\cdot\left|\tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\tilde{x})\cdot(\tfrac{1}{27})^4\right|=3\cdot\tfrac{1}{24}\cdot(\tfrac{1}{27})^4\cdot\left|f^{(4)}(\tilde{x})\right|.$$

Nach Aufgabe 95 gilt

$$f'''(x)=\frac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}}\Rightarrow$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}(x+1)^{-\frac{11}{3}}\Rightarrow$$

$$\left|f^{(4)}(\tilde{x})\right|=\left|\frac{-80}{81(\sqrt[3]{1+\tilde{x}})^{11}}\right|\overset{\tilde{x}\in[0;\frac{1}{27}]}{\leq}\frac{80}{81}.$$

Also folgt:

$$3\left|R_4(\tfrac{1}{27})\right|=3\cdot\tfrac{1}{24}\cdot(\tfrac{1}{27})^4\cdot\left|f^{(4)}(\tilde{x})\right|\leq 3\cdot\tfrac{1}{24}\cdot(\tfrac{1}{27})^4\cdot\tfrac{80}{81}\cong 2{,}323057312\cdot 10^{-7}.$$

Aufgabe 97 (Tüftelaufgabe ohne Parallelaufgabe in den Übungen mit Anregung zum Programmieren)
Über $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind folgende Eigenschaften bekannt:
a. f ist unendlich oft differenzierbar.

b. $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n\in\mathbb{N}_0, \\ 1 & \text{für ungerades } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

c. $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 2$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $x\in[0;1]$.

Schreiben Sie ein Programm, das nach Eingabe von $x\in[0;1]$ und $\varepsilon>0$ einen Näherungswert der Form $p_n(x)$ für $f(x)$ berechnet, wobei $\left|f(x)-p_n(x)\right|<\varepsilon$ gilt.
(Struktogramm !)
Welche Ausgabe erhalten Sie für $x=0{,}1$, $\varepsilon=10^{-6}$?

Lösungsvorschlag:
<u>Mathematische Analyse</u>:

$$p_n(x) \overset{\text{a.}}{=} \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(0)x^i \overset{\text{b.}}{=} \sum_{\substack{i=0 \\ i\text{ ungerade}}}^{n} \tfrac{1}{i!}x^i \Rightarrow$$

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{(2i+1)!}x^{2i+1} = p_{2n+2}(x),\ p_0(x)=0.$$

Es gibt $\tilde{x}$ zwischen 0 und x, so dass

$$\left|f(x)-p_{2n+1}(x)\right| = \left|f(x)-p_{2n+2}(x)\right| = \tfrac{1}{(2n+3)!}x^{2n+3}\left|f^{(2n+3)}(\tilde{x})\right| \overset{\text{c.}}{\Rightarrow}$$

$$\left|f(x)-p_{2n+1}(x)\right| = \left|f(x)-p_{2n+2}(x)\right| \le \tfrac{2}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

<u>Struktogramm</u>:

$x\in[0;1]$ einlesen	
$\varepsilon>0$ einlesen	
Näherung gleich x setzen	
Summand gleich $\frac{x^3}{6}$ setzen	
Index gleich 2 setzen	
Solange $2\cdot$Summand $\ge\varepsilon$	
	Näherung durch Näherung + Summand ersetzen
	Summand durch $\frac{\text{Summand}\cdot x^2}{2\cdot\text{Index}\cdot(2\cdot\text{Index}+1)}$ ersetzen
	Index durch Index + 1 ersetzen
Näherung ausgeben	

Als Ausgabe für $x=0{,}1$, $\varepsilon=10^{-6}$ habe ich Näherung = $0{,}1001\overline{6}$ erhalten. (Details hängen vom Rechner ab!)

Aufgabe 98
Bestimmen Sie für $f:]-\infty;1[\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\ln(\frac{1}{1-x})$ mit Hilfe der Definition die Taylorreihe $t(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0=0$
Geben Sie anschließend an, für welche x die Taylorreihe $t(x)$ konvergiert.

Lösungsvorschlag:
a.
Mit $f(x) = \ln(\frac{1}{1-x}) = \ln(1) - \ln(1-x) = -\ln(1-x)$ erhält man

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = -\ln(1-x) & f(x_0) = f(0) = 0 \\
f'(x) = (1-x)^{-1} & f'(x_0) = f'(0) = 1 \\
f''(x) = (1-x)^{-2} & f''(x_0) = f''(0) = 1 \\
f'''(x) = 2(1-x)^{-3} & f'''(x_0) = f'''(0) = 2 \\
\vdots & \\
f^{(n)}(x) = (n-1)!(1-x)^{-n} & f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = (n-1)!
\end{array}
$$

für $n \in \mathbb{N}$.
Damit folgt

$$t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{i!}(i-1)!\, x^i \overset{i!=i\cdot(i-1)! \text{ und kürzen}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{i} x^i .$$

Im Rahmen von Beispiel 4 zu A.1.5.1. wurde bereits gezeigt, dass $t(x)$ genau für $x \in [-1;1[$ konvergiert.

Aufgabe 99

Sei $f(x) = \arctan(x)$; $t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}$.

a. Zeigen Sie, dass $t(x)$ für alle $x \in]-1;1[$ konvergiert.
b. Zeigen Sie $t(x) = f(x)$ für alle $x \in]-1;1[$.

Lösungsvorschlag:
a.
Für $x = 0$ ist die Reihe offenbar absolut konvergent.
Betrachte für $x \neq 0, |x| < 1$, $b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, dann gilt:

$$s = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2n+3}(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{\frac{1}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1}} \right| \overset{\text{Doppelbruch auflösen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(-1)^n \cdot x^{2n+1}} \right| \overset{x^{2n+3}=x^2 x^{2n+1};(-1)^{n+1}=-(-1)^n}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(2n+1)\cdot(-1)^n\cdot x^2 \cdot x^{2n+1}}{(2n+3)\cdot(-1)^n \cdot x^{2n+1}} \right| \overset{\text{kürzen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(2n+1)\cdot x^2}{2n+3} \right| \overset{\text{Betrag ausrechnen}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^2 \tfrac{2n+1}{2n+3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} x^2 \tfrac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = x^2 \overset{|x|<1}{<} 1 .$$

Damit ist die Reihe auch für $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$ absolut konvergent.
Die Reihe konvergiert also für alle $x \in]-1;1[$.
b.
Für $x \in]-1;1[$ gilt:

$$t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \tfrac{1}{2i+1} x^{2i+1} \overset{\text{A.2.2.5.}}{\Rightarrow}$$

$$t'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \tfrac{1}{2i+1} \cdot (2i+1) x^{2i} \overset{\text{kürzen}}{=}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i} \overset{\text{Potenzgesetze}}{=}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i \overset{\text{A.1.4.3., } |x|<1}{=}$$

$$\tfrac{1}{1-(-x^2)} = \tfrac{1}{1+x^2} = f'(x).$$

Damit gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $t(x) = f(x) + c$ für alle $x \in]-1;1[$.

Für $x = 0$ erhält man insbesondere:

$t(0) = f(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$.

Damit ist $t(x) = f(x)$ für alle $x \in]-1;1[$.