Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel L.5.1.

Aufgabe 57

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear sind und geben Sie eine geometrische Interpretation an:

a. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$; b. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}v_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

a. Nachweis der Linearität von f:

Eigenschaft a. aus L.5.1.1. :

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Vektoren addieren}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \overset{f \text{ anwenden}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ -(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ -v_2 - w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{als Summe von zwei Vektoren schreiben}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{jeden Summanden als Funktionswert schreiben}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaft b. aus L.5.1.1. :

$$f\left(k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Vektor mit dem Skalar multiplizieren}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{f \text{ anwenden}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ -k \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Vektor als skalares Vielfaches einesVektors schreiben}}{=}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Vektor als Funktionswert schreiben}}{=}$$

$$k \cdot f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Geometrische Interpretation:

f beschreibt eine Spiegelung an der x - Achse.

b. Nachweis der Linearität von f:

Eigenschaft a. aus L.5.1.1. :

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Vektoren addieren}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \overset{f \text{ anwenden}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v_1 + w_1) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(v_2 + w_2) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}(v_1 + w_1) + \frac{1}{2}(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}v_2 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}w_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{als Summe von zwei Vektoren schreiben}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}v_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}w_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{jeden Summanden als Funktionswert schreiben}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaft b. aus L.5.1.1. :

$$f\left(k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Vektor mit dem Skalar multiplizieren}}{=}$$

$$f\begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{f \text{ anwenden}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}kv_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}kv_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}kv_1 + \frac{1}{2}kv_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Vektor als skalares Vielfaches eines Vektors schreiben}}{=}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}v_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Vektor als Funktionswert schreiben}}{=}$$

$$k \cdot f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Geometrische Interpretation:

f beschreibt eine Drehung um den Nullpunkt um 60^0 im mathematisch positiven Drehsinn.

Aufgabe 58 (ohne Parallelaufgabe in den Übungen)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

$$f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) \overset{f \text{ linear}}{=} 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}.$$