Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel L.5.2.

Aufgabe 59

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$.

a. Wie lautet die Funktionsvorschrift der zugehörigen linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

b. Sei $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $f_A(\vec{e}_1)$, $f_A(\vec{e}_2)$, $f_A(\vec{b}_1)$, $f_A(\vec{b}_2)$.

c. Wie lässt sich f_A geometrisch interpretieren?

Lösungsvorschlag:

a. $f_A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6v_1 + 0,8v_2 \\ 0,8v_1 + 0,6v_2 \end{pmatrix}$.

b. $f_A(\vec{e}_1) = f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$; $f_A(\vec{e}_2) = f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$;

$f_A(\vec{b}_1) = f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6+1,6 \\ 0,8+1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $f_A(\vec{b}_2) = f_A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2+0,8 \\ -1,6+0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. f_A lässt $\vec{b}_1$ fest und bildet den zu $\vec{b}_1$ senkrechten Vektor $\vec{b}_2$ auf $-\vec{b}_2$ ab. Damit beschreibt f_A eine Spiegelung an der Geraden durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\vec{b}_1$.

Aufgabe 60

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}v_1 - 2v_2 + \frac{1}{2}v_3 \\ v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 - 2v_2 + \frac{5}{2}v_3 \end{pmatrix}$.

a. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix A_f.

b. $B = (\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Matrix $A_f^{B,B}$.

Lösungsvorschlag:

a. Aus $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ folgt $A_f = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

b. Es gilt:

$f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 = 1\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3$;

$$f(\vec{b}_2)=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=2\cdot\vec{b}_2=0\cdot\vec{b}_1+2\cdot\vec{b}_2+0\cdot\vec{b}_3\,;$$

$$f(\vec{b}_3)=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}=3\cdot\vec{b}_3=0\cdot\vec{b}_1+0\cdot\vec{b}_2+3\cdot\vec{b}_3\,.$$

Damit ist $A_f^{\;B,B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 61

Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ beschreibe das Lotfällen auf die Gerade mit Richtungs-vektor $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie auf zwei Arten die Funktionsvorschrift von f :

a. indem Sie zunächst $A_f^{\;B,B}$ für eine „günstige“ Basis B aufstellen und daraus A_f und f berechnen;

b. mit Hilfe von L.2.1.2.

Lösungsvorschlag:

a.

<u>Schritt 1</u>: Bestimmung von $A_f^{\;B,B}$ bezüglich einer günstigen Basis B.

Setze $B=(\vec{b}_1;\vec{b}_2)$ mit $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Dann gilt:

$f(\vec{b}_1)=\vec{b}_1=1\cdot\vec{b}_1+0\cdot\vec{b}_2\,,$

$f(\vec{b}_2)=\vec{0}=0\cdot\vec{b}_1+0\cdot\vec{b}_2\,.$

Damit ist $A_f^{\;B,B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

<u>Schritt 2</u>: Berechung von A_f und f mit Hilfe von L.5.2.3..

Sei $C=\begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}$.

Mit L.4.2.1. folgt schnell:

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{13}&\frac{3}{13}\\\frac{-3}{13}&\frac{2}{13}\end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$A_f=C\cdot A_f^{\;B,B}\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{13}&\frac{3}{13}\\\frac{-3}{13}&\frac{2}{13}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{13}&\frac{3}{13}\\\frac{-3}{13}&\frac{2}{13}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}.$$

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist daher definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A_f \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 \\ 6 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 \end{pmatrix}.$

b.

Nach L.2.1.2. gilt:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \dfrac{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{2v_1 + 3v_2}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4v_1 + 6v_2 \\ 6v_1 + 9v_2 \end{pmatrix}.$