__**Lösungsvorschlag für die Aufgabe zu Kapitel L.6.1.**__

Aufgabe 62
Bestimmen Sie für die folgenden reellen Matrizen alle Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:

a. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; b. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$; c. $A=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; d. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:
a.

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E_2)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 1\\ 4 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)\cdot(2-\lambda)-4=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-1)\cdot(\lambda-6).$$

Damit gilt:
λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow$ $(\lambda-1)\cdot(\lambda-6)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda=1\vee\lambda=6$.
Beide Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1.
Nun werden die Eigenräume (und damit die Eigenvektoren) von A berechnet.
i. Berechnung von $\operatorname{Eig}(A,1)=Lös(A-E_2,\vec{0})$:

$$A-E_2=\begin{pmatrix}5-1 & 1\\ 4 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\cdot Z1]{Z2-Z1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \boxed{0}\end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\operatorname{Eig}(A,1)=Lös(A-E_2,\vec{0})=L\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\end{pmatrix}\right)=L\left(\begin{pmatrix}1\\ -4\end{pmatrix}\right).$$

Wegen $\dim(\operatorname{Eig}(A,1))=1$ hat der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 1.
ii. Berechnung von $\operatorname{Eig}(A,6)=Lös(A-6\cdot E_2,\vec{0})$:

$$A-6\cdot E_2=\begin{pmatrix}5-6 & 1\\ 4 & 2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[-Z1]{Z2+\frac{1}{4}\cdot Z1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & \boxed{0}\end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\operatorname{Eig}(A,6)=Lös(A-6\cdot E_2,\vec{0})=L\left(\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}\right)=L\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Wegen $\dim(\operatorname{Eig}(A,6))=1$ hat auch der Eigenwert 6 die geometrische Vielfachheit 1.
b.

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E_2)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ -\frac{1}{2} & 3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\cdot(3-\lambda)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$

Damit gilt:
λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow$ $(\lambda-2)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda=2$.
Dieser Eigenwert hat die algebraische Vielfachheit 2.
Nun werden der Eigenraum (und damit die Eigenvektoren) von A bestimmt.

Es ist $\mathrm{Eig}(A,2) = Lös(A-2\cdot E_2,\vec{0})$.

$$A-2\cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-Z1]{Z2-\frac{1}{2}\cdot Z1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\mathrm{Eig}(A,2) = Lös(A-2\cdot E_2,\vec{0}) = L\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}(A,2)) = 1$ hat der Eigenwert 2 „nur“ die geometrische Vielfachheit 1.

c.

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda\cdot E_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+16.$$

p_A hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, also hat A keine Eigenwerte!

d.

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda\cdot E_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entwicklung nach der 1. Spalte}}{=}$$

$$(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(4-\lambda)+1]-[2\cdot(4-\lambda)-2]-[-2-2\cdot(2-\lambda)] =$$

$$(1-\lambda)\cdot[\lambda^2-6\lambda+9]-[6-2\lambda]-[-6+2\lambda] =$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda-3)^2.$$

Damit gilt:

λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda-3)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=3$.

Der Eigenwert 1 hat die algebraische Vielfachheit 1; der Eigenwert 3 hat die algebraische Vielfachheit 2.

Nun werden die Eigenräume (und damit die Eigenvektoren) von A berechnet.

i. Berechnung von $\mathrm{Eig}(A,1) = Lös(A-E_3,\vec{0})$:

$$A-E_3 = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ -1 & 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1\leftrightarrow Z2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3+Z1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot Z2]{Z1-\frac{1}{2}\cdot Z2,\ Z3-Z2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\mathrm{Eig}(A,1) = L\ddot{o}s(A - E_2, \vec{0}) = L\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}(A,1)) = 1$ hat der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 1.

ii. Berechnung von $\mathrm{Eig}(A,3) = L\ddot{o}s(A - 3 \cdot E_3, \vec{0})$:

$$A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \cdot Z1]{Z2 + \frac{1}{2} \cdot Z1,\ Z3 - \frac{1}{2} \cdot Z1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\mathrm{Eig}(A,3) = L\ddot{o}s(A - 3 \cdot E_3, \vec{0}) = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}(A,3)) = 2$ hat der Eigenwert 3 die geometrische Vielfachheit 2.