

Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu Kapitel L.6.2.

Aufgabe 63

Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist.

Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis B des \mathbb{R}^3 , die aus Eigenvektoren von A besteht, eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{B,B} = D$.

Lösungsvorschlag:

a. Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte von A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Entwicklung nach der 1. Spalte} \\ = \end{array}$$

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \cdot [(1-\lambda)^2 - 1] - [(1-\lambda) - 1] + [1 - (1-\lambda)] =$$

$$(1-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 2\lambda] + \lambda + \lambda =$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda =$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 =$$

$$-\lambda^2 \cdot (\lambda - 3).$$

Damit gilt:

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 \cdot (\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3.$$

Der Eigenwert 0 hat die algebraische Vielfachheit 2; der Eigenwert 3 hat die algebraische Vielfachheit 1.

b. Berechnung der Eigenräume von A :

i. Berechnung von $\text{Eig}(A, 0) = \text{Lös}(A, \vec{0})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - Z_1 \end{array}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\text{Eig}(A, 0) = \text{Lös}(A, \vec{0}) = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Wegen $\dim(\text{Eig}(A, 0)) = 2$ hat der Eigenwert 0 die geometrische Vielfachheit 2.

ii. Berechnung von $\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(A - 3 \cdot E_3, \vec{0})$:

$$A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} Z2-Z1 \\ Z3+2 \cdot Z1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} Z1 + \frac{1}{3} \cdot Z2, \\ Z3 + Z2, \\ -\frac{1}{3} \cdot Z2 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. liefert

$$\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(A - 3 \cdot E_2, \vec{0}) = L \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Wegen $\dim(\text{Eig}(A, 3)) = 1$ hat der Eigenwert 3 die geometrische Vielfachheit 1.

c. Untersuchung auf Diagonalisierbarkeit:

$B = (\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^3 , die aus

Eigenvektoren von A besteht. Also ist A diagonalisierbar.

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt wegen $A \cdot \vec{b}_1 = 0 \cdot \vec{b}_1$, $A \cdot \vec{b}_2 = 0 \cdot \vec{b}_2$, $A \cdot \vec{b}_3 = 3 \cdot \vec{b}_3$:

$$\vec{b}_1 \uparrow \quad \uparrow \vec{b}_2 \quad \uparrow \vec{b}_3$$

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{B,B} = D \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 64

Untersuchen Sie mit Hilfe von L.6.2.2., welche der Matrizen aus Aufgabe 62 diagonalisierbar sind.

Geben Sie für die diagonalisierbaren Matrizen eine Basis B des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 , die aus Eigenvektoren von A besteht, eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D an mit $C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{B,B} = D$.

Lösungsvorschlag:

a.

Für $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ gilt nach Aufgabe 62:

- $p_A(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6)$; damit zerfällt p_A vollständig in Linearfaktoren.
- Beide Eigenwerte haben die algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

Damit ist A diagonalisierbar.

Ferner gilt nach Aufgabe 62:

$B = (\vec{b}_1; \vec{b}_2)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^2 , die aus Eigenvektoren von A

besteht.

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt wegen $A \cdot \vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1$, $A \cdot \vec{b}_2 = 6 \cdot \vec{b}_2$:

$$\vec{b}_1 \uparrow \quad \uparrow \vec{b}_2$$

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{B,B} = D \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b.

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ gilt nach Aufgabe 62:

- Der einzige Eigenwert hat die algebraische Vielfachheit 2, die geometrische Vielfachheit 1.

Damit ist A nicht diagonalisierbar.

c.

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ gilt nach Aufgabe 62:

- $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 16$ zerfällt nicht vollständig in Linearfaktoren.

Damit ist A nicht diagonalisierbar.

d.

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ gilt nach Aufgabe 62:

- $p_A(\lambda) = (1 - \lambda) \cdot (\lambda - 3)^2$; damit zerfällt p_A vollständig in Linearfaktoren.
- Für beide Eigenwerte stimmen die algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Damit ist A diagonalisierbar

Ferner gilt nach Aufgabe 62:

$B = (\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^3 , die aus

Eigenvektoren von A besteht.

Sei $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt wegen $A \cdot \vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1$, $A \cdot \vec{b}_2 = 3 \cdot \vec{b}_2$, $A \cdot \vec{b}_3 = 3 \cdot \vec{b}_3$:

$$\vec{b}_1 \uparrow \uparrow \vec{b}_2 \uparrow \vec{b}_3$$

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = A_f^{B \cdot B} = D \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$