Lösungen Mechanik

Aufgabe M1: Ein Flugzeug kann konstant mit einer Geschwindigkeit von 900 km/h gegen die umgebende Luft fliegen. Am ersten Tag fliegt es bei Windstille zu einem Ziel in 500 km Entfernung und zurück. Am zweiten Tag bläst ein konstanter Wind mit 40 m/sec; beim Hinflug in Gegenwind, beim Rückflug als Rückenwind.

a) Diskutieren Sie anhand einer mathematischen Beschreibung, ob das Flugzeug an beiden Tagen die gleiche Zeit benötigt.

Lösung: Es gilt das Superpositionsprinzip für Geschwindigkeiten; die Geschwindigkeit des Flugzeugs und des Windes überlagern sich additiv. Damit ergibt sich:

1) Ohne Wind

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

v = 900 km/h = 250 m/s

s =500 km = 5x10^5 m

$$t = \frac{5\times10^5\,\mathrm{m}}{250\,\mathrm{m/s}} = 2000\mathrm{s} = 33.3\,\mathrm{min}$$

Die Gesamtzeit berechnet sich damit zu $t_{ges} = 66.6\,\mathrm{min}$

2) Mit Wind

Die resultierende Geschwindigkeit ist nun die des Flugzeugs plus die des Windes; als Rückenwind positiv, als Gegenwind negativ. Damit ergibt sich

$$v_{hin} = 250\,\mathrm{m/s} - 40\,\mathrm{m/s} = 210\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{rück} = 250\,\mathrm{m/s} + 40\,\mathrm{m/s} = 290\,\mathrm{m/s}$$

$$t_{hin} = \frac{s}{v_{hin}} = \frac{5\times10^5\,\mathrm{m}}{210\,\mathrm{m/s}} = 2381\mathrm{s} = 39{,}7\,\mathrm{min}$$

$$t_{rück} = \frac{s}{v_{rück}} = \frac{5\times10^5\,\mathrm{m}}{290\,\mathrm{m/s}} = 1724\mathrm{s} = 28{,}7\,\mathrm{min}$$

Die Gesamtzeit ergibt sich damit zu $68{,}4$ min. Das Flugzeug ist also bei Wind länger unterwegs. Hintergrund ist, daß die Zeit reziprok zur Geschwindigkeit ist und damit nicht das Mittel über die Geschwindigkeit dem Mittel über die Zeit ist.

Aufgabe M2: Gegeben sei folgende Gleichung: $s = \frac{1}{2} at^2$.

a) Stellen Sie die entsprechende Einheitengleichung auf

b) Stellen Sie die Gleichung nach einer allgemeinen Lösung für a um

c) Sie sind durch ein plötzlich auftretendes Wurmloch auf einen unbekannten Planeten geschleudert worden. Als erstes wollen Sie natürlich wissen, wie hoch dessen Beschleunigung ist. Dazu lassen sie einen Stein 10 m weit in die Tiefe fallen, wozu er 2 Sekunden braucht. Wie hoch ist die Beschleunigung?

d) Schätzfrage: Ist der Planet größer oder kleiner als die Erde?

Lösung

a) $$[s] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{s}^2 = \mathrm{m}$$

b)

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Big| \times 2$$

$$\Leftrightarrow 2s = at^2 \quad \Big| \div t^2$$

$$\Rightarrow \frac{2s}{t^2} = a$$

c) $$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 10\mathrm{m}}{(2\mathrm{s})^2} = \frac{20\mathrm{m}}{4\mathrm{s}} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

d) Die Anziehungskraft zwischen dem Stein und dem Planeten ist proportional zur Masse des Steines und des Planeten, geteilt durch den Abstand (der Mittelpunkte) zum Quadrat:

$$F \propto \frac{m_{Planet}\ m_{Stein}}{r^2}$$

An der Oberfläche lässt sich die Kraft durch die Schwerebeschleunigung ausdrücken:

$$F = m_{stein}\ a$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, daß die Beschleunigung proportional zur Masse des Planeten ist:

$$a \propto m_{Planet}$$

Da die gemessene Beschleunigung ungefähr der halben Erdbeschleunigung entspricht, muß die Masse ungefähr der halben Erdmasse entsprechen.

Aufgabe M3. Sie sollen 5 Tütchen mit einer pharmazeutischen Substanz bezüglich der enthaltenen Masse kontrollieren. Dazu benutzen Sie eine Federwaage.

a) Erläutern Sie, warum Sie mit einer Federwaage Massen bestimmen können. Ist das eine direkte oder indirekte Bestimmung? Wenn Sie meinen, es ist eine indirekte Bestimmung, wie sähe dann die direkte aus

b) Die Waage hat eine Genauigkeit von ±1%. Das Gewicht der Tütchen bestimmen Sie zu 400 mg, und für die 5 Tütchen bestimmen Sie

Nummer	Bestimmte Masse
1	6,1 g
2	5,8 g
3	6,0 g
4	6,4 g
5	5,7 g

Berechnen Sie das mittlere Gewicht des Wirkstoffes und den Fehler; diskutieren Sie dabei systematischen und statistischen Fehler.

Lösung:

a) Eine Federwaage besteht aus einer Feder, die durch dir Gewichtskraft des Wägestücks zusammengedrückt bzw. auseinandergezogen wird. Die Längenänderung pro Kraft lässt sich nach dem Hook'schen Gesetz bestimmen:

$$F = -Ds$$

Dabei ist D die Federkonstante. Das Negative Vorzeichen drückt aus, daß die Federkraft der Gewichtskraft entgegengesetzt ist.

Die Gewichtskraft eines aufliegenden Wägestückes der Masse m ist

$$F = mg\ .$$

Da die Feder im Ruhezustand ist, sind Gewichtskraft und Federkraft gleich:

$$mg = -Ds$$

Gemessen wird die Länge s, die Masse m wird nach obiger Gleichung berechnet. Es handelt sich also um eine indirekte Bestimmung. Eine direkte Bestimmung wäre z.B. eine Balkenwaage, die zwei Massen direkt miteinander vergleicht.

b) Der Gesamtfehler setzt sich aus folgenden Einzelfehlern zusammen:

1) Die mittlere Schwankung beim Wiegen der Tütchen mit Inhalt

2) Der Fehler der Waage beim Abwiegen der Tütchen.

3) den Fehler beim Abwiegen der Tütchen aus dem Fehler der Waage

Die gesuchte Masse ergibt sich zu

$$m_{substanz} = m_{ges} - m_{Tütchen}$$

der Zusammenhang ist additiv, also addieren sich die absoluten Fehler zum Gesamtfehler. Damit ergibt sich für die Einzelfehler:

1) Tütchen mit Inhalt. Der Mittelwert ergibt sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$
$$= \frac{1}{5}(6{,}1 + 5{,}8 + 6{,}0 + 6{,}4 + 5{,}7)\mathrm{g}$$
$$= 6\mathrm{g}$$

Der mittlere absolute Fehler beim Wägen berechnet sich wie folgt:

$$f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}}$$

Zuerst wird die Summe der Quadratischen Abweichungen gebildet, siehe folgende Tabelle:

Nr	Masse	(xi-xq)^2
1	6.1	0.010
2	5.8	0.040
3	6	0.000
4	6.4	0.160
5	5.7	0.090
Summe		0.300

Der Ausdruck in der Summe ist also 0,3. damit ergibt sich der mittlere absolute Fehler zu

$$f = \sqrt{\frac{0.3\mathrm{g}^2}{5 \times 4}} = 0{,}122\mathrm{g}$$

Diese Fehler gibt die Schwankungen bei den Messungen an.

2) Nur Tütchen

Die Masse der Tütchen wurde zu 0,4 g bestimmt. Da die Waage einen relativen Fehler von 0.1% hat, ergibt sich der absolute Fehler zu

$$f = 0{,}4\mathrm{g} \times \frac{1}{100} = 0.004\mathrm{g}$$

3) Waagenfehler beim Bestimmen der Masse Tüten mit Inhalt

Der Mittelwert wurde hier zu $6\mathrm{g}$ berechnet. Auch für diesen gilt der Waagefehler von 1%, damit ergibt sich als absoluter Fehler

$$f = 6\mathrm{g} \times \frac{1}{100} = 0.06\mathrm{g}$$

Der absolute Gesamtfehler addiert sich also zu

$$f_{ges} = 0{,}122\text{g} + 0{,}004\text{g} + 0{,}06\text{g} = 0{,}186\text{g}$$

oder als relativer Fehler

$$f_{rel} = \frac{f_{absolut}}{\overline{x}} = \frac{0{,}186\text{g}}{5{,}6\text{g}} = 0{,}033 = 3{,}3\%$$

Damit ergibt sich der gemessene Wert zu

$$m_{Mittel} = 5{,}6\text{g} \pm 0{,}186\text{g}$$

oder

$$m_{Mittel} = 5{,}6\text{g} \pm 3{,}3\%$$

Alle betrachteten Fehler sind statistische Fehler, da sie zufälliger Natur sind. Ein systematischer Fehler wirkt sich bei allen Messungen gleich aus wie z.B. der Einfluß des Auftriebs der Tütchen in der Luft (der hier sehr klein ist) oder eine falsch kalibrierte Waage.

Aufgabe M4: Sie sitzen in einer Achterbahn. Zuerst fährt diese einen Berg der Höhe h=10 m hinunter (ohne Anfangsgeschwindigkeit), dann durch ein Looping des Durchmessers l

a) Wie schnell sind sie bei der Einfahrt in das Looping?

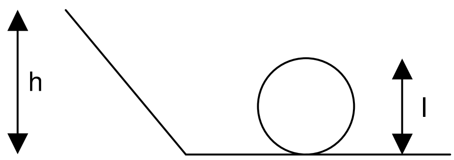
b) Spielt Ihre Masse dabei eine Rolle? Sollten Sie davor gut essen oder nicht oder ist das egal?

c) Da Sie in Ihrer Firma Sicherheitsbeauftragter sind, kommt Ihnen sofort ein Katastrophenscenario in den Sinn: Der Antrieb, der den Wagen im Looping beschleunigt, könnte ausfallen! Sie sehen nach oben, das Looping hat eine Höhe von 7 m. Ist Ihre Geschwindigkeit beim Einfahren in den Looping groß genug, dass Sie im Scheitelpunkt des Loopings nicht aus Ihren Sitzen fallen?

Bemerkung: Vernachlässigen Sie die Reibung

Lösung:

Folgende Skizze soll die Aufgabenstellung verdeutlichen:



a) Der Wagen starten in der Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit. Er hat also am Anfang nur potentielle Energie

$$E_{pot} = mgh$$

Nachdem er die Schräge heruntergerollt ist, hat er nur kinetische Energie, die gesamte potentielle Energie wurde aufgebraucht. Er hat also vor dem Looping die Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Dabei ist die Form der Abfahrt egal! Da die potentielle energie vollständig in kinetische Energie umgesetzt wurde, lassen sich beide Energien gleichsetzen:

$$E_{pot} = E_{kin}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Da die Masse auf beiden Seiten multiplikativ steht, fällt sie weg. Es ergibt sich für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 10\mathrm{m}} = 14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dies ist die Geschwindigkeit nach Herunterfahren und damit, weil Reibung vernachlässigt werden soll, vor dem Looping.

b) Die Masse fällt aus der Gleichung für die Geschwindigkeit heraus, spielt also physikalisch für die Geschwindigkeit vor dem Looping keine Rolle. Über subjektive Befindlichkeiten werden hier keine Aussagen gemacht ☺

c) Damit Sie nicht aus dem Wagen fallen, darf die Schwerkraft höchstens gleich dem senkrecht nach oben gerichtetem Anteil der Zentrifugalkraft sein. Diese ist definiert als

$$F_z = \frac{mv^2}{r}$$

und ist senkrecht zur Kreisbahn nach aussen gerichtet. v bezeichnet dabei die Geschwindigkeit auf der Kreisbahn.

Sobald Sie in das Looping einfahren, wird kinetische Energie wieder in potentielle Energie umgewandelt. Der Wagen gewinnt an Höhe, verliert aber dafür an Geschwindigkeit. Die größte Höhe und damit die kleinste Geschwindigkeit hat er im oberen Scheitelpunkt des Loopings. An diesem Punkt ist aber grade die Zentrifugalkraft nach oben, also entgegengesetzt der Schwerkraft gerichtet. Da die Geschwindigkeit an diesem Punkt am kleinsten ist, reicht es, diesen Punkt zu betrachten, an allen anderen Punkten ist die geschwindigkeit und damit die Zentrifugalkraft größer und presst Sie in den Sitz.

Am oberen Scheitelpunkt muß also die Zentrifugalkraft (mindestens) gleich der Schwerkraft sein:

$$mg = \frac{mv_o^2}{r}$$

oder, nach v_o^2 aufgelöst:

$$v_o^2 = gr$$

Der Index o bezieht sich dabei auf ‚oben'. Die Masse fällt wiederum heraus. Der Radius des Loopings ist gleich seiner halben Höhe l; also ergibt sich

$$v_o^2 = g\frac{l}{2}$$

Am oberen Punkt hat der wagen eine potentielle Energie mgh, wobei h der Höhe l entspricht, und eine kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_o^2$. Diese Gesamtenergie muß der Energie entsprechen, die er beim einfahren in das Looping gehabt hat:

$$mgl + \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_u^2$$

wobei v_u die Geschwindigkeit beim Einfahren ist. Einsetzen von v_o^2 in die Energiegleichung liefert:

$$mgl + \frac{1}{2}m\frac{g\,l}{2} = \frac{1}{2}mv_u^2$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun das v_u berechnen, welches die minimale Geschwindigkeit beim Einfahren ist, so dass der Wagen im Scheitelpunkt genügend kinetische Energie übrig hat, um genügend Zentrifugalkraft zu erzeugen. Wiederum sind alle Terme mit der Masse multipliziert, so dass man diese herauskürzen kann. Aufgelöst nach v_u ergibt sich dann:

$$v_u = \sqrt{2gl + \frac{g\,l}{2}} = \sqrt{g\,l\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}g\,l}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$v_u = \sqrt{\frac{5}{2} \times 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 7\mathrm{m}} = \sqrt{171{,}7\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 13{,}1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Diese Geschwindigkeit beim Einfahren in den Looping ist also minimal nötig, um in den Sitzen zu bleiben. In Teilaufgabe a) wurde errechnet, dass Sie mit $14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in den Looping einfahren; also reicht die Geschwindigkeit aus.

Aufgabe M5: In Ihrer Firma sollen Sie einen Lastenaufzug bestimmen, der eine Masse von 100 kg innerhalb 10 sec um 10 m anheben kann. Wie groß muß die Leistung des Motors sein? (Hinweis: sie haben natürlich einen perfekten Motor mit einem Wirkungsgrad von 100%)

Lösung: Leistung P ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit; also

$$P = \frac{A}{t}$$

Die Hubarbeit A ist Kraft mal Weg, also

$$A = Fs$$

Diese Gleichung ist in dieser Form immer anwendbar, wenn die Kraft unabhängig vom weg ist (Also nicht bei z.B. Feder, hier ist die Kraft abhängig vom Weg) und wenn die Kraft in Richtung des Weges wirkt.

Damit ergibt sich für die Leistung

$$P = \frac{Fs}{t}$$

Die Gewichtskraft einer Masse ist $F = am$,also in obige Gleichung eingesetzt:

$$P = \frac{a\,m\,s}{t}$$

und in Zahlenwerten als spezielle Lösung eingesetzt

$$P = \frac{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times 100\mathrm{kg}\times 10\mathrm{m}}{10\mathrm{s}} = 981\mathrm{W}$$

Aufgabe M6: Ein Zug mit einer Masse von 360 Tonnen fährt auf einer ebenen Strecke. Die Reibungskraft solle 0.5% der Gewichtskraft sein.

a) Wie groß ist die Arbeit, die die Lokomotive leistet, wenn der Zug über eine Strecke von 50 km fährt?

b) Wie groß ist die Leistung der Lokomotive, wenn er dazu eine halbe Stunde braucht?

c) Wie lange musste der Zug beschleunigen, um mit dieser Leistung (als konstant angenommen) auf diese Geschwindigkeit zu kommen? (Hinweis: Hierbei Reibung vernachlässigen). Skizzieren Sie den Verlauf der Geschwindigkeit gegen die Zeit und diskutieren Sie die Beschleunigung. Bleibt sie konstant?

Lösung

a) Damit der Zug mit einer konstanten Geschwindigkeit fahren kann, muß die Summe aller Kräfte Null sein (Newton 1). Würde eine Kraft wirken, würde er beschleunigt oder abgebremst. Also muß die von der Lokomotive aufgebrachte Kraft gleich der Reibungskraft sein.

Die Reibungskraft soll 0,5% der Gewichtskraft sein. Diese beträgt bei einer Masse von 360 Tonnen (=3,6x10^5 kg)

$$F_g = a\,m = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times 3{,}6\times 10^5\,\mathrm{kg} = 3{,}5316\times 10^6\,\mathrm{N}$$

Die Reibungskraft ist 0,5% davon, also

$$F_r = \frac{0{,}5}{100}F_g = 17658\mathrm{N}$$

Arbeit ist definiert als Kraft mal Weg, also

$$A = Fs = 17658N\times 50000\mathrm{m} = 8{,}829\times 10^8\,\mathrm{J} = 882{,}9\,\mathrm{MJ}$$

b) Leistung ist Arbeit pro Zeit. Der Zug braucht für die Strecke von 50 km eine halbe Stunde (=1800 s), also ist die Leistung

$$P = \frac{A}{t} = \frac{8.829\times 10^8\,\mathrm{J}}{1800\mathrm{s}} = 4{,}905\times 10^5\,\mathrm{W} = 490{,}5\mathrm{kW}$$

c) Nun soll berechnet werden, wie lange der Zug beschleunigen muß, um auf die Geschwindigkeit von 100 km/h (entsprechend 50km in einer halben stunde) zu kommen, wenn die Lok diese Leistung liefert.

Die Leistung ist

$$P = \frac{A}{t}$$

Wenn der Zug auf die Geschwindigkeit v beschleunigt hat, hat er die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Es muß also eine Arbeit geleistet worden sein, die dieser Energie entspricht. Damit ergibt sich für die Leistung:

$$P = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t}$$

oder anders ausgedrückt, die Leistung ist die kinetische Energie pro Zeiteinheit. Umstellen nach t führt zu

$$t = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{P}$$

und zu der speziellen Lösung mit der Geschwindigkeit 100 km/h = 27,78 m/s

$$t = \frac{\frac{1}{2} \times 3{,}6 \times 10^5\,\mathrm{kg} \times \left(27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{4{,}905 \times 10^5\,\mathrm{W}} = 283\mathrm{s}$$

Wie die der Verlauf der Beschleunigung war, ist nicht interessant; wichtig ist lediglich die Endgeschwindigkeit. Bei konstanter Leistungsabgabe ist die Beschleunigung nicht konstant.

Um den Verlauf der Geschwindigkeit zu diskutieren, löst man obige Gleichung nach v auf:

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}$$

Die Geschwindigkeit ist eine Wurzelfunktion mit der Zeit, wird also immer flacher mit zunehmender Zeit. Das heißt, die Zunahme der Geschwindigkeit wird immer geringer. Der Grund ist, dass bei konstanter Leistung die Energiezunahme pro Zeiteinheit konstant ist und die kinetische Energie quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt. Der Verlauf lässt sich wie folgt skizzieren: