Lösungen Wärmelehre

Aufgabe T1: Eine Druckgasflasche (V=50l) sei gefüllt mit Stickstoff unter einem Druck von 300 bar.

a) Wieviel Mol Gas sind bei $\vartheta = 25°C$ in der Flasche? (Allgemeine Gaskonstante R=8.3144 J/(mol*K)) Hinweis: betrachten Sie das Gas als ideales Gas

Lösung

a) Das Allgemeine Gasgesetzt lautet

$$pV = nRT$$

Umstellen nach n ergibt

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Das Hauptproblem hier ist, die angegebenen Zahlenwerte ins SI-System umzurechnen:

$$\begin{aligned} p &= 300\mathrm{bar} \\ &= 300 \times 10^5 \mathrm{Pa} \\ &= 3 \times 10^7 \mathrm{Pa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 50l \\ &= 50 \times 10^3 \mathrm{cm}^3 \\ &= 50 \times 10^3 \times (10^{-2}\mathrm{m})^3 \\ &= 50 \times 10^3 \times 10^{-6}\mathrm{m}^3 \\ &= 5 \times 10^{-2}\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= (\vartheta + 273{,}15)\mathrm{K} \\ &= 298{,}15\mathrm{K} \end{aligned}$$

Umrechnung von °C in absolute Temperatur

Damit ergibt sich als spezielle Lösung

$$n = \frac{3 \times 10^7 \mathrm{Pa} \times 5 \times 10^{-2} \mathrm{m}^3}{8{,}3144 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \times 298{,}15\mathrm{K}} = 605{,}1\,\mathrm{mol}$$

Aufgabe T2: Sie sitzen schon seit längerem in Ihrer Badewanne und das Wasser (70l) hat sich inzwischen auf 30°C abgekühlt. Wieviel Liter heißes Wasser (60°C) müssen Sie nachlaufen lassen, um wieder auf angenehme 37°C zu kommen?

Lösung Die Gleichung für die Mischtemperatur T_M von zwei Systemen, die die Wärmekapazität c, die Masse m und die absolute Temperatur T lautet

$$T_M = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$$

Da hier System 1 und System 2 Wasser sind, kann man die verschiedenen Wärmekoeffizienten mit der von Wasser gleichsetzen. Da alle Terme in der Gleichung mit c_{Wasser} multipliziert sind, kürzt sich diese Größe heraus und es bleibt

$$T_M = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

T_M ist dabei die gegebene Mischtemperatur. Beschreibe nun der Index 1 Temperatur und Masse am Anfangszustand und der Index 2 Temperatur und Masse des zulaufenden Wassers, so ist die gesuchte Größe m_2. Um m_2 auszurechnen, multipliziert man die Gleichung auf beiden Seiten mit $m1 + m2$, um den Bruch loszuwerden und erhält

$$T_M (m_1 + m_2) = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

ausmultiplizieren ergibt

$$T_M m_1 + T_M m_2 = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

Sortieren der rechten und linken Seite nach m_1 und m_2 durch subtrahieren von $T_M m_1$ und $m_2 T_2$ führt zu

$$T_M m_2 - m_2 T_2 = m_1 T_1 - T_M m_1$$

Mit Ausklammern ergibt sich

$$m_2 (T_M - T_2) = m_1 (T_1 - T_M)$$

und daraus

$$m_2 = m_1 \frac{T_1 - T_M}{T_M - T_2}$$

Da da hier nur Temperaturdifferenzen in der Gleichung enthalten sind, erübrigt sich ein Umrechnen der gegebenen Temperaturen von °C nach K; der konstante Anteil +273,15 würde herausfallen. Also ergibt sich als spezielle Lösung für obige Zahlenwerte, wenn man annimmt, dass 70l Wasser eine Masse von 70 kg haben:

$$m_2 = 70\text{kg} \times \frac{30°\text{C} - 37°\text{C}}{37°\text{C} - 60°\text{C}} = 21{,}3\text{kg}$$

Dieser Masse entsprechen 21,3 l Wasser.

Aufgabe T3: Leider hat Ihr Geld wieder nur für einen Campingurlaub in den Alpen gereicht. Vom Wandern sind Sie müde, sie wollen jetzt 1 l Maggi-Suppe kochen. Dazu benutzen Sie Ihren guten CampingGaz-Kocher. Dieser ist mit Butan betrieben (Brennwert 13.74 kWh/kg). Ihr Kocher verbraucht 90g Gas pro Stunde. Das Wasser habe eine Temperatur von 20°.

a) Wie lange benötigen Sie, um das Wasser zum Kochen zu bringen? (Wärmekapazität Wasser 4.183 kJ/(K kg))

b) Wie lange bräuchten Sie, wenn Sie kein Wasser, sondern nur Eis zur Verfügung hätten? (Temperatur 0°C, Schmelzwärme Wasser 334 kJ/kg)

Hinweis: Obwohl Sie in den Alpen in schwindelerregender Höhe sind, rechnen sie mit Normalbedingungen.

c) Skizzieren Sie qualitativ den Temperaturverlauf im Topf in Abhängigkeit von der zugeführten Energie.

d) Was würde sich qualitativ ändern, wenn Sie berücksichtigen, dass Sie in 2000 m Höhe sind?

e) Wie sie wissen, ist der Genuß von Eiswasser der Gesundheit abträglich aufgrund mangelnder Elektrolyte. Was würde sich qualitativ ändern, wenn Sie dem Eis nach dem Schmelzen Salz zusetzen?

Lösung

a) Um das Wasser zu erwärmen, ist Energie nötig. Diese lässt sich mit der Wärmekapazität berechnen:

$$Q = cmT$$

Diese Gleichung gilt strenggenommen für die Erwärmung vom absoluten Temperaturnullpunkt. Da das Wasser eine Temperatur von 20°C hat, hat es auch schon Wärmeenergie. Zu berechnen ist also die Energiedifferenz, die man braucht, wenn man es um eine Temperaturdifferenz erwärmt. Differenzen werden in der Physik durch ein vorangestelltes Δ gekennzeichnet. Damit ergibt sich

$$Q = cm\Delta T$$

Gefragt ist nach der Zeit, die ein Kocher mit der Leistung P benötigt. Die Leistung P ist definiert als Arbeit, die er verrichten kann, pro Zeit:

$$P = \frac{Q}{t}$$

oder aufgelöst nach t

$$t = \frac{Q}{P}$$

Über den Kocher ist ausgesagt, dass er 90g/h Butan verbrennt, das einen Brennwert H_s von 13,74 kWh/kg besitzt. Damit hat er eine Leistung P:

$$P = H_S \frac{m}{t'}$$

Die Größe $H_S m$ ist die Energie, die bei der Verbrennung von 1 kg Butan freigesetzt wird. Weiterhin ist $\frac{m'}{t'}$ der Verbrauch des Kochers (Massenfluß), eben 90g/h.

Setzt man diese Gleichungen in die Gleichung für die Zeit ein, erhält man als allgemeine Lösung:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{cm\Delta T}{H_S \frac{m'}{t'}}$$

Um auf die spezielle Lösung zu kommen, muß man prinzipiell in SI-Einheiten den Heizwert von KWh nach Ws=J umrechnen. Da aber auch der Massenfluß in g/h angegeben ist, passen die Zeiteinheiten zueinander; lediglich die Gramm des Massenflusses müssen in die SI-Einheit Kilogramm umgerechnet werden. Damit ergibt sich für den Massenfluß

$$\frac{m'}{t'} = 90\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} = 0.09\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}$$

und für die Zeit

$$t = \frac{4183\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \times 1\mathrm{kg} \times (100-20)\mathrm{K}}{13740\frac{\mathrm{Wh}}{\mathrm{kg}} \times 0{,}09\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}} = 271\mathrm{s}$$

Hierbei wurde angenommen, dass 1l Wasser eine Masse von 1 kg hat. Da in der Gleichung eine Temperaturdifferenz steht, kann auf die Umrechung von °C nach Kelvin verzichtet werden.

b) Jetzt soll nicht Wasser, sondern Eis mit einer Temperatur von 0°C zum Kochen gebracht werden. Dazu muß zuerst das Eis geschmolzen werden, was noch nicht zu einer Temperaturerhöhung führt. Die Energie wird dazu benötigt, das Eis in den flüssigen Aggregatzustand zu überführen. Anschließend wird, analog wie in Aufgabe a), das Wasser nun von 0°C auf 100°C erwärmt.

Zuerst wird die Zeit berechnet, die man zum Schmelzen benötigt. Die Schmelzenergie berechnet sich zu

$Q_{Schmelz} = H_{Schmelz} m$ mit der Schmelzwärme $H_{Schmelz}$ und der Masse M. Der Rechenweg ist analog zu Teilaufgabe a). Die Leistung, um das Eis in der Zeit t zu schmelzen, beträgt

$$P = \frac{Q_{schmelz}}{t_{Schmelz}}$$

also ist

$$t_{schmelz} = \frac{Q_{Schmelz}}{P} = \frac{H_{Schmelz} m}{P}$$

P ist die Leistung des Kochers aus Teilaufgabe 1, also

$$P = H_S \frac{m'}{t'} = 13740 \frac{\mathrm{Wh}}{\mathrm{kg}} \times 0{,}09 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}} = 1236\,\mathrm{W}$$

Zusammengefasst ergibt sich

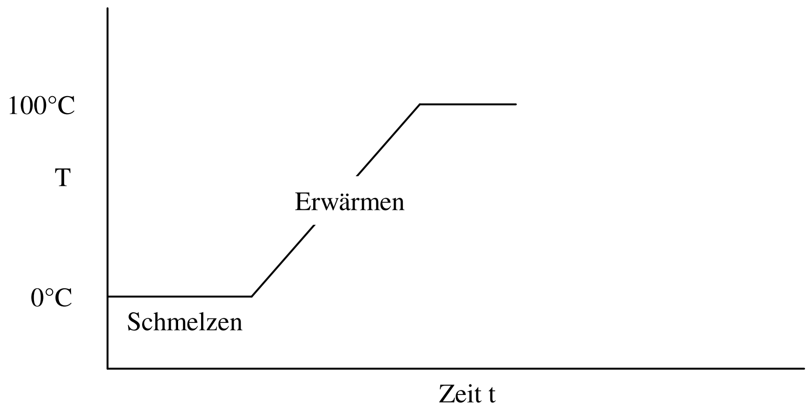
$$t_{schmelz} = \frac{H_{Schmelz} m}{H_S \frac{m'}{t'}} = \frac{334 \times 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \times 1\,\mathrm{kg}}{1236\,\mathrm{W}} = 270\,\mathrm{s}$$

Dieses Wasser muß nun von 0°C auf 100°C erwärmt werden, siehe Teilaufgabe a):

$$t_{W\ddot{a}rm} = \frac{4183 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \times 1\,\mathrm{kg} \times (100-0)\,\mathrm{K}}{13740 \frac{\mathrm{Wh}}{\mathrm{kg}} \times 0{,}09 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}} = 338\,\mathrm{s}$$

Die Gesamtzeit beträgt also 270s + 338s = 608s

c) Der Temperaturverlauf im Topf sieht wie folgt aus:



Während des Schmelzens ändert sich die Temperatur nicht, da die Energie benötigt wird, um das Eis in Wasser zu überführen. Erst wenn das Wasser flüssig ist, wird es durch die Wärmeenergie erhitzt.

d) Kochen bedeutet, dass der Dampfdruck gleich dem Aussendruck ist. Nach der barometrischen Höhenformel beträgt der Druck in 2000 m Höhe nur noch ca. 78% des Drucks auf Meereshöhe, das Wasser kocht schon bei ca. 93°C.

e) Eine Salzzugabe würde bewirken, dass das Eis bereits bei 0°C schmilzt (Ohne Temperatureinwirkung) und das es erst bei einer höheren Temperatur, in Abhängigkeit vom Salzgehalt, siedet. Diese Siedepunktserhöhung ist jedoch sehr gering (ca. 0.17K bei 10 g/kg NaCl in H_2O)

Aufgabe T4: Sie wollen mit einer 2ml-Spritze injizieren. Unglücklicherweise ist die Kanüle verstopft. Sie sind gut durchtrainiert und pressen mit einer Kraft, die 20 kg entspricht, auf den Stempel. Wie hoch ist der Druck in der Spritze, wenn der Kolben einen Durchmesser von 12 mm habe?

Lösung: Druck ist definiert als Kraft pro Fläche. Die Kraft soll der Gewichtskraft von 20 kg entsprechen, also

$$F = mg$$

Die Fläche A berechnet sich über die Kreisfläche zu

$$A = \pi\, r^2$$

Damit ergibt sich für den Druck

$$p = \frac{F}{A} = \frac{ma}{\pi\, r^2}$$

$$r = \frac{12}{2} mm = 6 \times 10^{-3} m$$

Damit ergibt sich als spezielle Lösung

$$p = \frac{20\text{kg} \times 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\pi(6 \times 10^{-3}\,\text{m})^2} = 1{,}7 \times 10^6\,\text{Pa} \approx 17\text{bar}$$

In der kleinen Plastikspritze herrscht also ein Druck von ca. 17 bar, was leicht zum Bersten führen kann.

Aufgabe T5. Sie sind mal wieder an einer Tankstelle. Sie tanken 50 l Benzin innerhalb von 1.5 Minuten. Benzin hat einen Brennwert von 47MJ/kg und eine Dichte von 0.7 g/cm³. Berechnen Sie die potentielle Energie pro Sekunde (=Leistung!), die transferiert wird.

Hinweis: Biblis A hat eine Leistung von 1225 MW, ein Kohlekraftwerk bis zu 700 MW!

Lösung: Die Energie von Benzin beträgt

$$Q = H_s m$$

mit dem Brennwert H_S.Gegeben ist hier aber nicht die Masse, sondern das Volumen. Über die Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ lässt sich die Masse bestimmen zu $m = \rho V$, was eingesetzt ergibt

$$Q = H_S \rho V$$

Die Leistung als Energietransfer ist damit

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{H_S \rho V}{t} = \frac{47\times10^6 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \times 7\times10^{-4} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} \times 50\times10^3\,\mathrm{cm}^3}{90\mathrm{s}} = 1{,}827\times10^7\,\mathrm{W} = 18{,}3\mathrm{MW}$$

Beachten Sie, dass hier nicht alle Werte in SI-Einheiten umgerechnet wurden. Da sich die nicht-SI-Einheit cm³ herauskürzt, ist das Endergebnis trotzdem eine SI-Einheit.

Der Energietransfer ist also beim Tanken wesentlich höher als die Energieumsetzung beim Fahren, was chemische Brennstoffe so ungemein praktisch macht. Bei Elektrischer Energie in Batterien haben beide Prozesse, das Aufladen sowie das Abgeben, ungefähr die gleiche Geschwindigkeit. Weiterhin ist der Brennwert von chemischen Brennstoffen sehr hoch gemessen an der Energie pro kg.