Mathematik II für Informatiker – Doppelprobeklausur zur Wiederholung

Wiederholungsaufgabe 1

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix}$.

a. Zeigen Sie, dass f linear ist.

b. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix A_f.

c. $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix $A_f^{B,B}$ bezüglich B.

Wiederholungsaufgabe 2

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Ist A diagonalisierbar?

Wiederholungsaufgabe 3

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

	Ist immer richtig	Ist nicht immer richtig
Falls A n paarweise verschiedene Eigenwerte hat, so ist A diagonalisierbar.		
Falls A diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.		
Falls das charakteristische Polynom von A vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so ist A diagonalisierbar.		
Falls für jeden Eigenwert von A die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, so ist A diagonalisierbar.		
Falls A diagonalisierbar ist, so hat A n paarweise verschiedene Eigenwerte.		

Wiederholungsaufgabe 4

Berechnen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

a. $(a_n) = \left(\dfrac{n^2 + 2n + 1}{5n^2 + n \cdot \sin(n)}\right)$; b. $(b_n) = \left(\dfrac{\sqrt[n]{n} \cdot (1 + 0{,}5^n)}{(1 + \frac{1}{n})^n}\right)$.

Wiederholungsaufgabe 5

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 4^i$; b. $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{i!}{i^i}$.

Wiederholungsaufgabe 6

a. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der reellen Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} 4^i x^i$.

b. Entscheiden Sie unter alleiniger Ausnutzung des Resultats aus a., ob die gegebene Potenzreihe für die folgenden Werte von x konvergiert oder divergiert:
i. $x = \frac{1}{10}$; ii. $x = -2$.

Wiederholungsaufgabe 7
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ sei eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 4$. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

	Ist immer richtig	Ist nicht immer richtig
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$.		
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus]-4;4[$.		
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für $x \in]-4;4[$ absolut.		
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 4$.		
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$.		

Wiederholungsaufgabe 8
Differenzieren Sie und vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich:
a. $f(x) = \sin^2(3x+7)$; b. $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$.

Wiederholungsaufgabe 9
Berechnen Sie $\int \sin(x)\cos(x)dx$
a. durch Substitution $y = \sin(x)$; b. durch Substitution $y = \cos(x)$.
c. Vergleichen Sie die Resultate und erklären Sie den auftretenden Effekt.
d. Berechnen Sie $\int \sin(x)\cos(x)dx$ durch partielle Integration.

Wiederholungsaufgabe 10
Eine faire Münze wird geworfen. Erscheint Wappen, so wird sie noch einmal geworfen; erscheint Zahl, so wird mit einem fairen Würfel einmal gewürfelt.
a. Geben Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) an.
b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Wurf/Würfeln Wappen oder eine Zahl ≤ 2 zu erhalten.