

Mathematik II für Informatiker – Doppelprobeklausur zur Wiederholung – Lösungsvorschläge

Wiederholungsaufgabe 1

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix}$.

a. Zeigen Sie, dass f linear ist.

b. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix A_f .

c. $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix $A_f^{B,B}$ bezüglich B .

Lösungsvorschlag:

a.

Eigenschaft a. aus L.5.1.1. :

$$\begin{aligned} f \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) &\stackrel{\text{Vektoren addieren}}{=} f \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \stackrel{f \text{ anwenden}}{=} \begin{pmatrix} 2(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 4(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \stackrel{\text{ausmultiplizieren}}{=} \\ &\stackrel{\text{als Summe von zwei Vektoren schreiben}}{=} \begin{pmatrix} 2v_1 + 2w_1 - v_2 - w_2 \\ v_1 + w_1 + 4v_2 + 4w_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{jeden Summanden als Funktionswert schreiben}}{=} \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w_1 - w_2 \\ w_1 + 4w_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenschaft b. aus L.5.1.1. :

$$\begin{aligned} f \left(k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) &\stackrel{\text{Vektor mit dem Skalar multiplizieren}}{=} f \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \end{pmatrix} \stackrel{f \text{ anwenden}}{=} \\ &\stackrel{\text{Vektor als skalares Vielfaches eines Vektors schreiben}}{=} \begin{pmatrix} 2 \cdot k \cdot v_1 - k \cdot v_2 \\ k \cdot v_1 + 4 \cdot k \cdot v_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Vektor als Funktionswert schreiben}}{=} \\ &k \cdot \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} = k \cdot f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b.

$$f(\vec{e}_1) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; f(\vec{e}_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

c.

$$\begin{aligned} f(\vec{b}_1) &= f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; f(\vec{b}_2) = f \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ A_f^{B,B} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wiederholungsaufgabe 2

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Ist A diagonalisierbar?

Lösungsvorschlag:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Damit gilt:

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Nun wird der Eigenraum von A bestimmt.

$$\text{Es ist } \text{Eig}(A, 2) = \text{Lös}(A - 2 \cdot E_2, \vec{0}).$$

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 3 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Z1} \leftrightarrow \text{Z2}]{\frac{1}{3} \text{Z2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Entzerrungsalgorithmus L.3.4.6. ergibt

$$\text{Eig}(A, 2) = \text{Lös}(A - 2 \cdot E_2, \vec{0}) = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

A ist nicht diagonalisierbar, da der einzige Eigenwert 2 die algebraische Vielfachheit 2, aber die geometrische Vielfachheit 1 hat.

Wiederholungsaufgabe 3

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

	Ist immer richtig	Ist nicht immer richtig
Falls A n paarweise verschiedene Eigenwerte hat, so ist A diagonalisierbar.	x	
Falls A diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis des \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren von A besteht.	x	
Falls das charakteristische Polynom von A vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so ist A diagonalisierbar.		x
Falls für jeden Eigenwert von A die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, so ist A diagonalisierbar.		x
Falls A diagonalisierbar ist, so hat A n paarweise verschiedene Eigenwerte.		x

Wiederholungsaufgabe 4

Berechnen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

a. $(a_n) = \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2 + n \cdot \sin(n)} \right);$

b. $(b_n) = \left(\frac{\sqrt[n]{n} \cdot (1 + 0,5^n)}{(1 + \frac{1}{n})^n} \right).$

Lösungsvorschlag:

a.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2 + n \cdot \sin(n)} = ?$$

Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$ liefert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} \cdot \sin(n)}.$$

Mit den Grenzwertsätzen folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n})^2}{5 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} \cdot \sin(n))}.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt und die Folge $(\sin(n))$ beschränkt ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + 2 \cdot 0 + (0)^2}{5 + 0} = \frac{1}{5}.$$

b.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot (1 + 0, 5^n)}{(1 + \frac{1}{n})^n} = ?$$

Mit den Grenzwertsätzen folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot (1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 0, 5^n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Wegen $|0,5| < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} 0, 5^n = 0$; ferner gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1 \cdot (1 + 0)}{e} = \frac{1}{e}.$$

Wiederholungsaufgabe 5

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 4^i$;

b. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{i^i}$.

Lösungsvorschlag:

a.

Sei $a_n = n \cdot 4^n$. Dann ist $a_n > 0$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 > 1$$

Also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

b.

Sei $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Dann ist $a_n > 0$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Also ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent.

Wiederholungsaufgabe 6

a. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der reellen Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} 4^i x^i$.

b. Entscheiden Sie unter alleiniger Ausnutzung des Resultats aus a., ob die gegebene Potenzreihe für die folgenden Werte von x konvergiert oder divergiert:

- i. $x = \frac{1}{10}$; ii. $x = -2$.

Lösungsvorschlag:

a. Sei $a_n = 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n} = 4$ und nach der Formel von Cauchy – Hadamard ist $R = \frac{1}{r} = \frac{1}{4}$.

b. i. Wegen $|x| = \left|\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} < \frac{1}{4} = R$ ist die Reihe konvergent.

ii. Wegen $|x| = |-2| = 2 > \frac{1}{4} = R$ ist die Reihe divergent.

Wiederholungsaufgabe 7

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ sei eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 4$. Ergänzen Sie die folgende

Tabelle:

	Ist immer richtig	Ist nicht immer richtig
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$.	X	
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus]-4; 4[$.		X
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für $x \in]-4; 4[$ absolut.	X	
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 4$.		X
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$.		X

Wiederholungsaufgabe 8

Differenzieren Sie und vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich:

a. $f(x) = \sin^2(3x + 7)$;

b. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Lösungsvorschlag:

a.

Nach der Kettenregel gilt:

$$f'(x) = 2 \cdot \sin(3x + 7) \cdot \cos(3x + 7) \cdot 3$$

Wegen $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ folgt

$$f'(x) = 3 \cdot \sin(6x + 14).$$

b.

Nach der Kettenregel gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Wiederholungsaufgabe 9

Berechnen Sie $\int \sin(x) \cos(x) dx$

- durch Substitution $y = \sin(x)$; b. durch Substitution $y = \cos(x)$.
- Vergleichen Sie die Resultate und erklären Sie den auftretenden Effekt.
- Berechnen Sie $\int \sin(x) \cos(x) dx$ durch partielle Integration.

Lösungsvorschlag:

a.

$$\text{Substitution: } y = \sin(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} dy$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \int y \cos(x) \frac{1}{\cos(x)} dy = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C.$$

b.

$$\text{Substitution: } y = \cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sin(x)} dy$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = -\int \sin(x) y \frac{1}{\sin(x)} dy = -\int y dy = -\frac{1}{2} y^2 + C = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C.$$

c.

Wegen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt $\frac{1}{2} \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x)$; die in a. und b. gefundenen Stammfunktionen unterscheiden sich also um eine Konstante.

d.

Setze $g(x) = \sin(x)$; $g'(x) = \cos(x)$;

$$f(x) = \sin(x); \quad f'(x) = \cos(x).$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx =$$

$$\int g(x) \cdot f'(x) dx =$$

$$g(x) \cdot f(x) - \int g'(x) \cdot f(x) dx =$$

$$\sin^2(x) - \int \cos(x) \cdot \sin(x) dx.$$

Wir sehen nur auf die unterstrichenen Zeilen und erhalten:

$$2 \cdot \int \sin(x) \cos(x) dx = \sin^2(x) + C \Rightarrow$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C.$$

Wiederholungsaufgabe 10

Eine faire Münze wird geworfen. Erscheint Wappen, so wird sie noch einmal geworfen; erscheint Zahl, so wird mit einem fairen Würfel einmal gewürfelt.

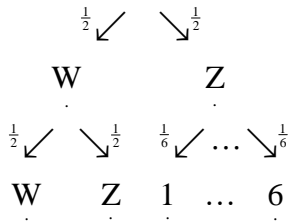
- Geben Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) an.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Wurf/Würfeln Wappen oder eine Zahl ≤ 2 zu erhalten.

Lösungsvorschlag:

a.

Es werden die Abkürzungen W für Wappen und Z für Zahl verwendet.

Damit ist $\Omega = \{(W; W); (W; Z); (Z; 1); (Z; 2); (Z; 3); (Z; 4); (Z; 5); (Z; 6)\}$.



Der Wahrscheinlichkeitsbaum liefert, dass $p : \Omega \rightarrow [0; 1]$ definiert ist durch

$$p(W; W) = p(W; Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad p(Z; i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ für alle } i = 1; \dots; 6.$$

b.

Gesucht ist $p(E)$ mit $E = \{(W; W); (Z; 1); (Z; 2)\}$.

$$p(E) = p(W; W) + p(Z; 1) + p(Z; 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$