

ANALYSIS

A.1. Folgen und Reihen

A.1.1. Reelle Folgen

Wozu braucht man Kenntnisse über reelle Folgen?

- Folgen bilden die Grundlage der gesamten Differenzial- und Integralrechnung; besonders fundamental ist der Grenzwertbegriff.
- Viele Naturkonstanten sind letztlich als Grenzwert einer Folge definiert, z. B. ist $e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
- Rechner bestimmen solche Konstanten näherungsweise durch Berechnung von a_n für „großes“ n ; dabei ist natürlich der Fehler von Interesse.
- Beim Programmieren werden beim Durchlaufen einer Zählschleife oft die ersten Glieder einer Folge berechnet.

Es soll nun zunächst darum gehen, die oben genannten Begriffe zu klären: Wir beginnen mit a_n und dem damit zusammenhängenden Begriff der reellen Folge. Im Grundlagenkapitel wurde in der Lehrveranstaltung unter den Beispielen zu G.3.2.1. schon erwähnt, dass reelle Folgen reelle Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{N} sind. Dies ist auch der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen; es folgen die üblichen speziellen Notationen:

A.1.1.1. Reelle Folgen

Eine reelle Funktion (vgl. G.3.1.1.) $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **reelle Folge**.

Schreibweisen:

- Statt $a(n)$ schreibt man a_n für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Statt $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ schreibt man $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_n) .

Bitte achten Sie darauf, dass Sie hier die Klammern nicht vergessen!

a_n ist das n . **Folglied** von (a_n) .

Beispiele zu A.1.1.1.:

Bitte ergänzen Sie jeweils das 3. - 5. Folgenglied!

1. $(a_n) = (\frac{1}{n})$

Die ersten 5 Folgenglieder lauten:

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \dots; a_4 = \dots; a_5 = \dots$$

2. $(b_n) = ((-1)^n)$

Die ersten 5 Folgenglieder lauten:

$$b_1 = -1; b_2 = 1; b_3 = \dots; b_4 = \dots; b_5 = \dots$$

3. $(c_n) = (n)$

Die ersten 5 Folgenglieder lauten:

$$c_1 = 1; c_2 = 2; c_3 = \dots; c_4 = \dots; c_5 = \dots$$

4. $(d_n) = (\frac{1}{10} n!)$

Die ersten 5 Folgenglieder lauten:

$$d_1 = \frac{1}{10}; d_2 = \frac{1}{5}; d_3 = \dots; d_4 = \dots; d_5 = \dots$$

5. $(e_n) = (\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})$

Die ersten 5 Folgenglieder lauten:

$e_1 = \frac{5}{4}; e_2 = \frac{5}{2}; e_3 = \dots; e_4 = \dots; e_5 = \dots$

Zur Veranschaulichung gibt es ein u. A. ein

→ Bild als Kopiervorlage

Sie sehen an dem Bild, dass es zwar Möglichkeiten der Veranschaulichung von Folgen gibt, dass man diesen aber nur bedingt allgemein gültige Informationen entnehmen kann. Das kann daran liegen, dass die Folgenglieder sehr groß oder betragsmäßig sehr klein werden. (Auch beim Programmieren gibt es in solchen Situationen Probleme!) Daher ist es besonders wichtig, charakteristische, typische Eigenschaften von Folgen anzugeben. Dabei bieten sich zunächst die Begriffe der Monotonie und Beschränktheit an, die ja sogar für beliebige reelle Funktionen erklärt sind (vgl. G.3.2.4. bzw. G.3.2.6.).

A.1.1.2. Monotonie bei Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt...	falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
monoton wachsend	$a_n \leq a_{n+1}$
streng monoton wachsend	$a_n < a_{n+1}$
monoton fallend	$a_n \geq a_{n+1}$
streng monoton fallend	$a_n > a_{n+1}$

(a_n) heißt (**streng**) **monoton**, falls (a_n) (streng) monoton wachsend **oder** (streng) monoton fallend ist.

Dies ist ein Spezialfall von G.3.2.4., wenn man bedenkt, dass es genügt, Folgenglieder mit „benachbarten“ Indizes zu vergleichen.

A.1.1.3. Beschränktheit bei Folgen

Eine reelle Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls die Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ im Sinne von G.3.2.6. beschränkt ist. (Dies bedeutet, dass es $K, L \in \mathbb{R}$ gibt mit $K \leq a_n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder äquivalent $a_n \in [K; L]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.)

Im Rahmen der Beispiele zu A.1.1.2./3. werden wir ein anschaulich offensichtliches Resultat notieren, das später sehr wichtig werden wird:

A.1.1.4. Die Unbeschränktheit der Folge der natürlichen Zahlen

Es gibt kein $L \in \mathbb{R}$ mit $n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 Insbesondere ist die Folge (n) nicht beschränkt.

Beachten Sie bitte, dass man A.1.1.4. äquivalent so formulieren kann:
 Zu jedem $L \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $L < n$.

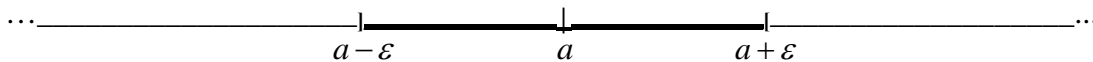
→ Aufgabe 65

Wir kommen nun zum wohl wichtigsten Begriff im Zusammenhang mit Folgen, dem Begriff der Konvergenz. Wir wollen uns zunächst anschaulich klar machen, was es bedeutet, dass eine reelle Folge (a_n) gegen eine reelle Zahl a konvergiert.

Vorbetrachtung zu A.1.1.5.: Konvergenz – von der Anschauung zur Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$.

Wir zeichnen zunächst a auf der Zahlengeraden ein und schlagen dann um a einen Kreis mit Radius ε , wobei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, also auch „winzig klein“ sein kann. Auf diese Art erhalten wir auf der Zahlengeraden ein offenes Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ mit Mittelpunkt a , das ebenfalls „winzig klein“ sein kann.



(a_n) hat nun den Grenzwert a , falls a_n für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ außerhalb des markierten Intervalls $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ liegt.

Wir formulierten diesen Sachverhalt nun so um, dass er sich rechnerisch besser nachweisen lässt:

(a_n) hat den Grenzwert $a \Leftrightarrow$

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $a_n \notin]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Leftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Leftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Leftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Damit erhalten wir:

A.1.1.5. Grenzwert / Konvergenz / Divergenz

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) der reellen Folge (a_n) , falls gilt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Schreibweise in diesem Fall: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Sprechweise in diesem Fall: (a_n) **konvergiert** gegen a .

2. Eine Folge (a_n) , die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**; Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**.

3. Hat eine Folge einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Vorsicht! In A.1.1.5. ist $a \in \mathbb{R}$; $a = \pm\infty$ ist **nicht zulässig!**

Mit Hilfe von A.1.1.5. werden in der Lehrveranstaltung die ersten beiden Grenzwerte der folgenden Tabelle bestimmt; die anderen Einträge werden später behandelt:

Tabelle wichtiger Grenzwerte reeller Folgen

$a_n =$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
c (Konstante)	$= c$
$\frac{1}{n}$	$= 0$
$\frac{1}{n^k}$ ($k \in \mathbb{N}$ fest)	$= 0$
n	existiert nicht
$\sqrt[n]{x}$ ($x > 0$ fest)	$= 1$
$\sqrt[n]{n}$	$= 1$
x^n ($x \in]-1; 1[$ fest)	$= 0$
x^n ($x \in \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$ fest)	existiert nicht
$(1 + \frac{1}{n})^n$	$= e$

Einen Spezialfall des nächsten Eintrags können Sie sich anschauen als

→ Aufgabe 66,

auf die anderen Einträge werden wir später zu sprechen kommen.

Beim Nachweis der Divergenz einer Folge hilft manchmal der folgende Zusammenhang mit der Beschränktheit:

A.1.1.6. Die Beschränktheit konvergenter Folgen

Ist (a_n) eine konvergente Folge, so ist (a_n) beschränkt.

(Für Divergenznachweise hilfreich ist die folgende Umformulierung: Ist (a_n) eine unbeschränkte Folge, so ist (a_n) divergent.)

Vorsicht! Auch beschränkte Folgen können divergent sein! In einem solchen Fall treten zwei (oder mehr) „Beinahe-Grenzwerte“ auf, die präzise Häufungspunkte heißen. Dazu:

A.1.1.7. Häufungspunkte

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von (a_n) , falls gilt:

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

2. Ist (a_n) konvergent mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, so ist a der einzige Häufungspunkt von (a_n) .

(Für Divergenznachweise hilft die folgende Umformulierung: Ist (a_n) eine Folge mit mindestens zwei Häufungspunkten, so ist (a_n) divergent.)

Nachdem wir Möglichkeiten kennen gelernt haben, Divergenz nachzuweisen, wenden wir uns nun wieder der Grenzwertbestimmung zu – und zwar ohne die Definition durch Zurückführen auf bekannte Grenzwerte. Als erstes wichtiges Hilfsmittel sind in diesem Kontext zu nennen:

A.1.1.8. Grenzwertsätze

Für Folgen (a_n) und (b_n) und $c \in \mathbb{R}$ gelten:

1. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b; \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a.$
2. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$
3. $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, (b_n)$ beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$

→ Aufgabe 67

Auch durch Vergleichen kann man „neue“ Grenzwerte erhalten:

A.1.1.9. Grenzwertberechnung durch Vergleich mit bekannten Grenzwerten

Für Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) gelten:

1. $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, |b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (**Einschachtelungssatz**)

Mit Hilfe von A.1.1.9.2. kann man aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ weitere Grenzwerte bestimmen. Dazu:

→ Aufgabe 68

Erinnern Sie sich noch an die Einleitung dieses Kapitels, in der versprochen wurde, dass man wichtige Konstanten als Grenzwerte von Folgen definieren kann? Wenn man dies tun will, braucht man für Folgen **Konvergenzkriterien, in denen der Grenzwert nicht explizit vorkommt**. Hier ist ein solches Kriterium:

A.1.1.10. Ein Konvergenzkriterium, in dem der Grenzwert nicht explizit vorkommt

Ist (a_n) eine monotone und beschränkte Folge, so ist (a_n) konvergent.

Beispiel 1. zu A.1.1.10.: Aufgabenstellung und Vorüberlegungen

(a_n) sei rekursiv definiert durch

I. $a_1 = 2;$

II. $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}.$

Berechnung der ersten Folgenglieder:

$a_1 = \dots\dots\dots a_2 = \dots\dots\dots$

$a_3 = \dots\dots\dots a_4 = \dots\dots\dots$

Vermutungen:

a. Bezüglich Beschränktheit: $a_n \in [\dots\dots; \dots\dots]$ für alle $n \in \mathbb{N};$

b. Bezüglich Monotonie: (a_n) ist $\dots\dots\dots$

c. Bezüglich Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

→ Aufgabe 69 mit Anregung zum Programmieren