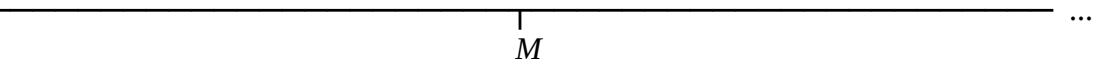
A.1.3. Uneigentliche Grenzwerte bei reellen Folgen

In diesem kurzen Abschnitt geht es um die bis jetzt ausgesparten „uneigentlichen“ Grenzwerte $\pm\infty$ bei Folgen.

Vorüberlegung zu A.1.3.1.: Wann hat (a_n) den uneigentlichen Grenzwert ∞?

Sei (a_n) eine reelle Folge.

Wir betrachten wieder die Zahlengerade und zeichnen darauf eine beliebige Zahl M ein, die durchaus „riesig“ sein kann.



(a_n) hat nun den Grenzwert ∞, falls für jedes solche M a_n für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ „links von M“ liegt.

Wir formulieren diesen Sachverhalt so um, dass er sich rechnerisch besser nachweisen lässt:

(a_n) hat ∞ als uneigentlichen Grenzwert $\Leftrightarrow$

für jedes $M \in \mathbb{R}$ gilt: $a_n \leq M$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$

zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Damit erhalten wir:

A.1.3.1. Uneigentliche Grenzwerte bei Folgen

Eine reelle Folge (a_n) hat ∞ (bzw. $-\infty$) als **uneigentlichen Grenzwert**, falls gilt:

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ (bzw. $a_n < M$) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Vorsicht!

1. Nicht jede divergente Folge hat den Grenzwert ∞ oder $-\infty$, wie $((-1)^n)$ zeigt.
2. Nicht jede unbeschränkte Folge hat den Grenzwert ∞ oder $-\infty$, wie $((-1)^n \cdot n)$ zeigt.

→ Aufgabe 71