A.1.4. Reihen

Wozu braucht man Kenntnisse über Reihen?

- Reihen sind Folgen, die durch Aufsummieren von Gliedern einer Summandenfolge entstehen.
- Solche Folgen werden besonders gern zur Definition wichtiger Konstanten via Grenzwert verwendet.
- Da sich Summationsprozesse besonders gut programmieren lassen (Stichwort: Zählschleifen), kann man Näherungswerte für solche Konstanten besonders gut mit dem Rechner bestimmen.

Vorabbeispiel zu A.1.4.1. aus der Programmierung

Anzahl n der Summanden einlesen (ohne Anfangssummand)	
Summand gleich 1 setzen	
Summe gleich 1 setzen	
Für $i=1$ bis n	
	Summand durch Summand/i ersetzen
	Summe durch Summe + Summand ersetzen
Summe ausgeben	

Bezeichnungen:

Anfangssummand a_0; Anfangssumme s_0;

Summand im i. Schleifendurchlauf a_i;

Summe im i. Schleifendurchlauf s_i (jeweils nach dem Ersetzen)

Protokoll für $n=6$:

i	a_i	s_i	
(0)	1	$1=$	1
1	1	$1+1=$	2
2	$\frac{1}{2}$	$(1+1)+\frac{1}{2}=$	2,5
3	$\frac{1}{6}$	$(1+1+\frac{1}{2})+\frac{1}{6}=$	$2,\overline{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})+\frac{1}{24}=$	$2,708\overline{3}$
5	$\frac{1}{120}$	$(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24})+\frac{1}{120}=$	$2,71\overline{6}$
6	$\frac{1}{720}$	$(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120})+\frac{1}{720}=$	$2,7180\overline{5}$

Vermutung:

Dieses Programm berechnet Näherungswerte für ………..

Mathematischer Hintergrund:

Summandenfolge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n=\frac{1}{n!}$

Summenfolge: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n=\sum_{i=0}^{n} a_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$

Vermuteter Grenzwert der Summenfolge: $\lim_{n\to\infty} s_n=$ ………

Andere Schreibweise der Vermutung: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \ldots\ldots\ldots..$

Etwas Vergleichbares wie in diesem Einführungsbeispiel machen wir nun allgemein. Achten Sie dabei ganz besonders darauf, dass Sie es immer mit zwei Folgen zu tun haben!

A.1.4.1. Reihen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine (reelle oder komplexe) Folge.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der **Partialsummen** heißt dann die zur Summandenfolge (a_n) gehörige **Reihe**.

Ist (s_n) (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) konvergent, so nennt man $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ die **Summe** der Reihe.

Bezeichnung: $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Auch die Folge (s_n) wird oft mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ bezeichnet – unabhängig von der Konvergenz.

Einige der in der Lehrveranstaltung behandelten Beispiele zu A.1.4.1. sind so wichtig, dass sie hier gesondert erwähnt werden:

A.1.4.2. Die harmonische Reihe

ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Sie ist divergent.

Vorsicht! Dieses Resultat wird Sie vielleicht überraschen, da „immer kleinere" Summanden addiert werden. Da selbst der beste Computer $\frac{1}{n}$ für „großes" n gleich 0 setzt, kann kein Computer die Divergenz dieser Reihe erkennen!

→ Aufgabe 72

A.1.4.3. Geometrische Reihen

sind von der Form $\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = 1 + x + x^2 + ...$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Für die n. Partialsumme gilt:

$$s_n = \begin{cases} n & \mathit{falls} \quad x = 1; \\ \frac{1-x^n}{1-x} & \mathit{falls} \quad x \neq 1. \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}$ ist für $|x| < 1$ konvergent mit Summe $\frac{1}{1-x}$ und für $|x| \geq 1$ divergent.

Anmerkung zu A.1.4.3.:

Geometrische Reihen spielen in der Wirtschaft eine wichtige Rolle. Dieser Anwendungsaspekt wird für Interessenten behandelt in

→ Aufgabe 73 ohne Parallelaufgabe in den Übungen

In der folgenden Tabelle finden Sie die bis jetzt behandelten Reihen und einige weitere übersichtlich zusammengestellt:

Beispiele zu A.1.4.1. ff: Wichtige Reihen

Die Reihe…	ist…
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$	divergent (harmonische Reihe).
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$	konvergent.
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$)	konvergent.
$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}$ ($x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$)	konvergent mit Summe $\frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe).
$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}$ ($x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert \geq 1$)	divergent (geometrische Reihe).
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$	konvergent.
$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i}$	konvergent (alternierende harmonische Reihe).

Die Divergenz der geometrischen Reihe für $|x| \geq 1$ kann man unter Verwendung der Formel für die n. Partialsumme sehen; alternativ kann man auch das folgende Resultat verwenden:

A.1.4.4. Die Summandenfolge einer konvergenten Reihe ist eine Nullfolge.

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Vorsicht!

In A.1.4.4. gilt nur: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent $\boxed{\Rightarrow}$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Nicht $\boxed{\Leftrightarrow}$! Ein Beispiel dafür ist die harmonische Reihe (vgl. A.1.4.2.).

Die eingangs vorgestellten Beispiele werden zunächst die einzigen sein, die wir mit der Definition A.1.4.1. behandeln. Weitere Reihen kann man mit Hilfe des folgenden Resultats untersuchen:

A.1.4.5. Grenzwertsätze für Reihen

Sind $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergente Reihen mit Summen a bzw. b und ist c eine Konstante, so gelten:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ ist konvergent mit Summe $a \pm b$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} (c \cdot a_i)$ ist konvergent mit Summe $c \cdot a$.

Vorsicht!
A.1.4.5.1. bleibt nicht richtig, wenn man „ $\pm$ “ durch „ $\cdot$ “ ersetzt!

$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 74}}$

In der Einleitung des Kapitels wurde schon darauf hingewiesen, dass viele wichtige Konstanten gerade als Summen konvergenter Reihen definiert sind. Daher ist es wichtig, Konvergenzkriterien für Reihen zu kennen, die die Summe nicht explizit enthalten. Wir sehen uns zunächst die Vergleichskriterien und das Wurzel- und Quotientenkriterium an, die für reelle Reihen mit positiver Summandenfolge funktionieren. Wir beginnen mit den Vergleichskriterien:

A.1.4.6. Vergleichskriterien
Sind (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $0 \le a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

1. Ist $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent und es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \le \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.
2. Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

Wurzel- und Quotientenkriterium folgen aus den Vergleichskriterien; als Vergleichsreihen dienen in diesem Fall geometrische Reihen:

A.1.4.7. Wurzel- und Quotientenkriterium
(a_n) sei eine reelle Folge mit $0 \le a_n$ (bzw. $0 < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiere $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (bzw. $s = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$). Dann gelten:

1. Ist $r < 1$ (bzw. $s < 1$), so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.
2. Ist $r > 1$ (bzw. $s > 1$), so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent.
3. Ist $r = 1$ (bzw. $s = 1$), so kann mit dem Wurzelkriterium (bzw. Quotientenkriterium) nicht entschieden werden, ob $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert.

Einige Merkregeln zu A.1.4.7.:
Beim Auftreten von Fakultäten hilft oft das Quotientenkriterium!
Beim Auftreten von n. Potenzen hilft oft das Wurzelkriterium!

Mit A.1.4.6. und A.1.4.7. haben wir die wesentlichen Kriterien zur Behandlung von Reihen mit positiven Summanden kennen gelernt. Es kommt darauf an, einen Blick dafür zu entwickeln, welches Kriterium (bzw. welche Kriterien) in einem konkreten Fall angemessen sind. Dazu dient:

$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 75}}$

Bei A.1.4.6. und A.1.4.7. hatten wir es mit reellen Reihen mit positiver Summandenfolge zu tun. Als eine Art „Kontrastprogramm“ dazu betrachten wir nun reelle Reihen, deren Summandenfolge abwechselnd positive und negative Glieder hat; dies sind die alternierenden Reihen:

A.1.4.8. Alternierende Reihen

1. Eine Reihe der Form $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$, wobei (a_n) eine reelle Folge mit $0 < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, heißt **alternierende Reihe**.
2. a**.** Hinreichendes Konvergenzkriterium **(Leibnizkriterium**):

   Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$.

   b. Fehlerabschätzung:

   (a_n) sei eine monoton fallende Nullfolge, $s = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$, $s_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i$.

   Dann gilt: $|s - s_n| \le a_{n+1}$.

$\boxed{\to \text{ Aufgabe 76}}$

Was macht man nun, wenn eine Reihe weder eine positive Summandenfolge hat noch alternierend ist? Oft hilft in einem solchen Fall die Untersuchung auf absolute Konvergenz. Diese absolute Konvergenz ist auch der Schlüssel zur Untersuchung von vielen komplexen Reihen.

A.1.4.9. Absolute Konvergenz

(a_n) sei eine (reelle oder komplexe) Folge. $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ konvergiert.

Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ ist konvergent und es gilt $\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$.

Bemerkungen zu A.1.4.9.

1. **Vorsicht!** Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.
2. Die Ungleichung am Ende von A.1.4.9. ist eine „unendliche Variante“ der Dreiecksungleichung.

Alle Konvergenzkriterien für Reihen mit nicht negativer Summandenfolge lassen sich zum Nachweis absoluter Konvergenz verwenden. Aus praktischen Gründen formulieren wir die Versionen des Wurzel- und Quotientenkriteriums für absolute Konvergenz explizit:

A.1.4.10. Wurzel- und Quotientenkriterium für absolute Konvergenz

(a_n) sei eine (reelle oder komplexe) Folge (mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Es existiere

$r = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (bzw. $s = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$). Dann gelten:

1. Ist $r < 1$ (bzw. $s < 1$), so ist $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ absolut konvergent.
2. Ist $r > 1$ (bzw. $s > 1$), so ist $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ divergent.

3. Ist $r = 1$ (bzw. $s = 1$), so kann mit dem Wurzelkriterium (bzw. Quotientenkriterium) nicht entschieden werden, ob $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergiert.

→ Aufgabe 77