

## A.1.5. Potenzreihen und spezielle Funktionen

### Grundidee dieses Abschnitts:

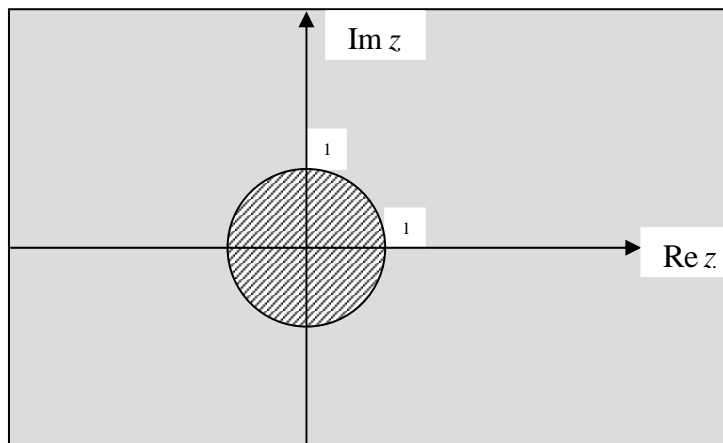
- Bis jetzt haben wir „komplizierte“ Zahlen wie z. B.  $e$  als Grenzwerte von Folgen bzw. Summen von Reihen beschrieben. Die zuletzt genannte Beschreibung half besonders bei der Berechnung von Näherungswerten via Taschenrechner oder Computer: Man bestimmte Partialsummen für „großes“  $n$ , was relativ leicht zu programmieren ist.
- Nun wollen wir „komplizierte“ Funktionen ähnlich beschreiben: Man nehme für jede Zahl des Definitionsbereichs eine nach einheitlichem Bildungsgesetz definierte Reihe und definiere den Funktionswert als Summe dieser Reihe – Konvergenz vorausgesetzt! Partialsummen helfen dann wieder bei der Bestimmung von Näherungen von Funktionswerten.

Wir werden uns für dieses Vorgehen in der Lehrveranstaltung 3 Beispiele genauer anschauen; dies sind die Vorabbeispiele zu A.1.5.1.

→ Aufgabe 78

Das folgende Bild illustriert das Ergebnis der oben erwähnten Vorabbeispiele:

### Vorabbeispiele zu A.1.5.1.: Veranschaulichung größtmöglicher Definitionsbereiche



1.  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} z^i$       Größtmöglicher Definitionsbereich:  $\mathbb{C}$   
Stichwort: ALLES
2.  $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} z^i$       Größtmöglicher Definitionsbereich:  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$   
Stichwort: KREIS
3.  $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i^i z^i$       Größtmöglicher Definitionsbereich:  $\{0\}$   
Stichwort: PUNKT ( bitte im Bild einzeichnen )

Diese Beispiele sind typisch. Allgemein stellt sich die Situation wie folgt dar:

### A.1.5.1. Potenzreihen; Konvergenzbereich; Konvergenzradius

1. Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine komplexe ( bzw. reelle ) Folge;  $z, z_0 \in \mathbb{C}$  ( bzw.  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  ). Dann

heißt die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  ( bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  ) eine **komplexe ( bzw. reelle )**

**Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  ( bzw.  $x_0$  ).**

2. Es gilt stets eine der folgenden Aussagen:

Möglichkeit 1: Die Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  ( bzw.  $x \in \mathbb{R}$  ) absolut.

( Stichwort: ALLES )

Möglichkeit 2: Es gibt  $R \in \mathbb{R}, R > 0$ , so dass die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  ( bzw.  $x \in \mathbb{R}$  )

mit

...  $|z - z_0| < R$  ( bzw.  $|x - x_0| < R$  ) absolut konvergiert;

...  $|z - z_0| > R$  ( bzw.  $|x - x_0| > R$  ) divergiert.

Für  $|z - z_0| = R$  ( bzw.  $|x - x_0| = R$  ) ist keine allgemeine Aussage möglich!

( Stichwort: KREIS )

Möglichkeit 3: Die Reihe konvergiert nur für  $z = z_0$  ( bzw.  $x = x_0$  ).

( Stichwort: PUNKT )

3. Tritt die Möglichkeit 2 ein, so heißt  $R$  der **Konvergenzradius** der Potenzreihe; tritt die Möglichkeit 1 ein, so setzt man  $R = \infty$ ; tritt die Möglichkeit 3 ein, so setzt man  $R = 0$ .

4. Tritt die Möglichkeit 2 ein, so ist  $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$

( bzw.  $I_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R\}$  ) der **Konvergenzkreis** ( bzw. das **Konvergenzintervall** ) der Potenzreihe; tritt die Möglichkeit 1 ein, so setzt man  $K_R = \mathbb{C}$  ( bzw.

$I_R = \mathbb{R}$  ).

Beachten Sie bitte, dass man das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe fast vollständig kennt, falls der Konvergenzradius bekannt ist: Nur die Information über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises ( bzw. Konvergenzintervalls ) fehlt. Daher wird die Bestimmung des Konvergenzradius bei den in der Lehrveranstaltung betrachteten Beispielen eine zentrale Rolle einnehmen.

→ Aufgabe 79

Falls bei der Besprechung der oben genannten Beispiele der Eindruck entstanden ist, dass bei der Bestimmung des Konvergenzradius von  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  ( bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  ) eigentlich nur  $(a_n)$  eine Rolle spielt, so ist dieser Eindruck richtig! Die folgende vereinfachte „Berechnungsformel“ für den Konvergenzradius bestätigt dies:

### A.1.5.2. Die Berechnung des Konvergenzradius mit der Formel von Cauchy - Hadamard

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  ( bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  ) sei eine komplexe ( bzw. reelle ) Potenzreihe mit

Konvergenzradius  $R$ . Dann gelten:

1. Ist  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  unbeschränkt, so ist  $R = 0$ .

2. Existiert  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , so erhält man:

a.  $R = \frac{1}{r}$ , falls  $r \neq 0$  ist;

b.  $R = \infty$ , falls  $r = 0$  ist.

Ist  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so lässt sich im obigen Resultat  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  auch durch  $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$  ersetzen.

→ Aufgabe 80

Wir kehren nun zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurück und fixieren zunächst die folgende Terminologie:

### A.1.5.3. Durch Potenzreihen dargestellte Funktionen

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  ( bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  ) sei eine komplexe ( bzw. reelle ) Potenzreihe mit

Konvergenzradius  $R > 0$  und Konvergenzkreis  $K_R$  ( bzw. Konvergenzintervall  $I_R$  ).

Dann heißt  $f : K_R \rightarrow \mathbb{C}$  ( bzw.  $f : I_R \rightarrow \mathbb{R}$  ) mit  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  ( bzw.

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  ) die **durch die obige Potenzreihe dargestellte Funktion**.

Beispiel 1. aus den Vorabbeispielen zu A.1.5.1. ist ganz besonders wichtig. Wir sehen uns zunächst die reelle Variante an und erhalten:

### A.1.5.4. Die reelle Exponentialfunktion

Die **reelle Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch die Vorschrift

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot x^i$$

definiert.

( Das ist erlaubt, da die obige Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert. )

Eigenschaften:

1.  $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(1) = e$
2.  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

#### Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

3.  $\exp(x) \neq 0$ ,  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
4. a.  $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > 1$   
b.  $x < 0 \Rightarrow 0 < \exp(x) < 1$
5.  $\exp(x)^n = \exp(n \cdot x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Eine Skizze des Graphen der reellen Exponentialfunktion finden Sie im Anschluss an A.1.5.5.

→ Aufgabe 81

Als ersten „Verwandten“ von  $\exp$  betrachten wir:

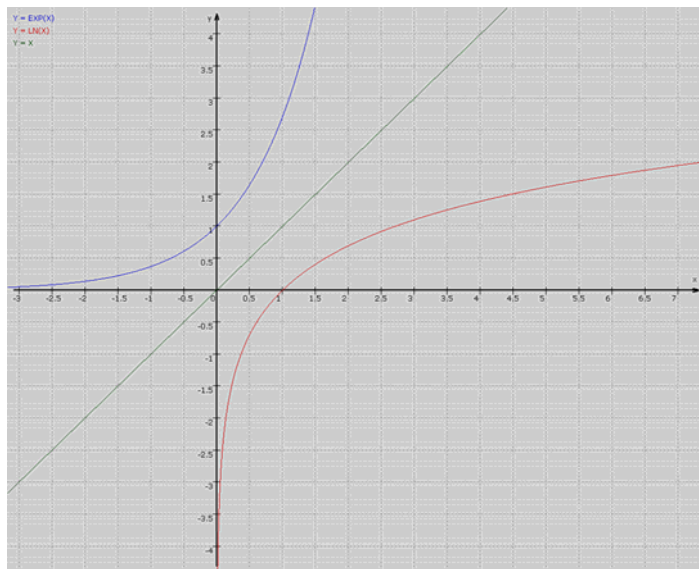
### A.1.5.5. Der natürliche Logarithmus

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend mit  $W_{\exp} = ]0; \infty[$ . Die nach G.3.2.5. existierende Umkehrfunktion von  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0; \infty[$  ist der **natürliche Logarithmus**  $\ln: ]0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eigenschaften:

1.  $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$
2.  $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y \in ]0; \infty[$ .
3.  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$  für alle  $x \in ]0; \infty[$ .
4. a.  $x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$   
b.  $0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$
5.  $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$  für alle  $x \in ]0; \infty[, n \in \mathbb{N}$ .

### Anschauung zu A.1.5.4./5.



$\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0; \infty[$  ist streng monoton wachsend mit Wertebereich  $]0; \infty[$  ( der Graph ist links oben im Bild zu sehen ).  $\ln: ]0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Umkehrfunktion von  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0; \infty[$  ( der Graph von  $\ln$  ist rechts unten im Bild zu sehen; er entsteht aus dem Graphen von  $\exp$  durch Spiegeln an der ersten Winkelhalbierenden ).

### Bemerkungen zu A.1.5.5.

1. Die Eigenschaften 1. – 5. aus A.1.5.5. sind genaue Entsprechungen von 1. – 5. aus A.1.5.4. via Umkehrfunktion.
2. Die große Bedeutung von Logarithmen besteht darin, dass sie eine Reduktion auf eine einfachere Rechenart erlauben, z. B. von Multiplikation auf Addition ( A.1.5.5.2. ), Potenzbildung auf Multiplikation (A.1.5.5.5. ).

Ob Sie den Umgang mit Logarithmen beherrschen ( Schulmathematik! ), können Sie testen im Rahmen von

→ Aufgabe 82

Nun sollen allgemeine Potenzen erklärt werden, also  $a^x$  für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . ( Das ist **nicht** banal; was bedeutet zum Beispiel  $7^e$  oder  $\pi^e$  ? ) In der Lehrveranstaltung wird gezeigt, dass die Definition wie in A.1.5.6. aussehen **muss**, falls alle vertrauten Potenzgesetze und  $e^x = \exp(x)$  gelten sollen.

Man kann auch eine entsprechende Betrachtung für allgemeine Logarithmen durchführen und erhält insgesamt:

#### A.1.5.6. Potenzen und Logarithmen zur Basis $a$

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , sind .

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } \log_a : ]0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\exp_a(x) = \exp(\ln(a) \cdot x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R};$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ für alle } x \in ]0; \infty[.$$

Für  $\exp_a(x)$  ist die Schreibweise  $a^x$  üblich.

$\exp_a$  ist die **Exponentialfunktion zur Basis  $a$** ;  $\log_a$  ist die **Logarithmusfunktion zur Basis  $a$** .

#### Bemerkungen zu A.1.5.6.

1. Manche Programmiersprachen, z. B. PASCAL, verfügen nicht über allgemeine Potenzen, wohl aber über  $\exp$  und  $\ln$ . Mit  $a^x = \exp(\ln(a) \cdot x)$  sind dann allgemeine Potenzen programmierbar.
2. Entsprechend ist  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$  für Programmierzwecke wichtig. Diese Beziehung ist auch für die Berechnung beliebiger Logarithmen mit manchen Taschenrechnern interessant.

Wir haben bis jetzt festgestellt, dass alle Potenz- und Logarithmusfunktionen „Verwandte“ der reellen Exponentialfunktion sind. Es ist überraschend, dass auch die trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion verwandt sind – allerdings mit der komplexen.

Schauen wir uns diese an:

#### A.1.5.7. Die komplexe Exponentialfunktion

Die **komplexe Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist durch die Vorschrift

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k,$$

definiert.

( Das ist erlaubt, da die obige Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert. )

Statt  $\exp(z)$  schreibt man auch  $e^z$ .

Eigenschaften:

1.  $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$

#### Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Als Spezialfall erhält man:  $\exp(a+b \cdot i) = \exp(a) \cdot \exp(b \cdot i)$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2.  $\exp(z) \neq 0$ ,  $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
3.  $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
4.  $|\exp(b \cdot i)| = 1$  für alle  $b \in \mathbb{R}$ .

Wie berechnet man nun Werte der komplexen Exponentialfunktion? Der Spezialfall zu A.1.5.7. 1. liefert, dass es nur auf die reelle Exponentialfunktion und Funktionswerte rein-imaginärer Zahlen der komplexen Exponentialfunktion ankommt.

Diese Funktionswerte liegen nach A.1.5.7. 4. auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt in der Zahlenebene, haben also die Polarform  $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$  für geeignetes  $\varphi$ . In G.2.3.8. haben wir „symbolisch“  $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = \exp(i \cdot \varphi)$  geschrieben. Passend dazu werden wir anschließend Cosinus und Sinus so definieren, dass  $\cos(x) + i \cdot \sin(x) = \exp(i \cdot x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

### A.1.5.8. Cosinus und Sinus

Die Funktionen **Cosinus** und **Sinus** sind wie folgt erklärt:

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos(x) = \operatorname{Re} \exp(i \cdot x),$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sin(x) = \operatorname{Im} \exp(i \cdot x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt nach Definition die **Eulerformel**

$$\exp(i \cdot x) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Eigenschaften:

1. Falls  $\frac{\pi}{2}$  als kleinste positive Nullstelle des Cosinus definiert ist, erhält man die Wertetabelle im Anschluss an G.2.3.9.  
Insbesondere gelten:  $\cos(0) = 1$ ;  $\sin(0) = 0$ .
2.  $\cos(-x) = \cos(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d. h. **cos ist gerade**;  
 $\sin(-x) = -\sin(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d. h. **sin ist ungerade**.
3.  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
4.  $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ ;  
 $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

( **Additionstheoreme** )

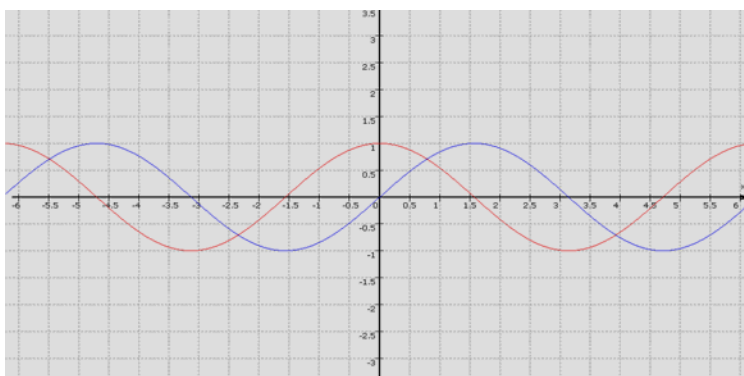
$$5. \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k};$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

( **Reihendarstellungen** )

Beachten Sie, dass die linke Seite der Eulerformel nun nicht nur ein Symbol ist wie in G.2.3.8., sondern ein Wert der komplexen Exponentialfunktion.

### Anschauung zu A.1.5.8.



→ Aufgabe 83 ( Tüftelaufgabe )

→ Aufgabe 84

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir „zum Nachschlagen“ noch eine kurze Übersicht über Verwandte von Cosinus und Sinus ( und damit letztlich von der komplexen Exponentialfunktion ):

#### A.1.5.9. Mit Cosinus und Sinus „verwandte“ Funktionen

1.  $\cos : ]0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton fallend mit  $W_{\cos} = ]-1; 1[$ .

Die nach G.3.2.5. existierende Umkehrfunktion von  $\cos : ]0; \pi[ \rightarrow ]-1; 1[$

ist der **Arcuscosinus**

$$\arccos : ]-1; 1[ \rightarrow ]0; \pi[.$$

2.  $\sin : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend mit  $W_{\sin} = ]-1; 1[$ .

Die nach G.3.2.5. existierende Umkehrfunktion von  $\sin : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-1; 1[$

ist der **Arcussinus**

$$\arcsin : ]-1; 1[ \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$$

3. Die Funktionen **Tangens** und **Cotangens** sind erklärt durch:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)};$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

4.  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend mit  $W_{\tan} = \mathbb{R}$ .

Die nach G.3.2.5. existierende Umkehrfunktion ist der **Arcustangens**

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$$

5.  $\cot : ]0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton fallend mit  $W_{\cot} = \mathbb{R}$ .

Die nach G.3.2.5. existierende Umkehrfunktion ist der **Arcuscotangens**

$$\operatorname{arc cot} : \mathbb{R} \rightarrow ]0; \pi[.$$