

## A.2. Einige Aspekte der Differenzialrechnung in $\mathbb{R}$

### A.2.1. Grenzwertbildung bei Funktionen und Stetigkeit

#### Wozu braucht man Kenntnisse über Grenzwertbildung bei Funktionen und Stetigkeit?

- Oft stellt man sich unter reellen Funktionen „automatisch“ stetige Funktionen vor, bei denen z. B. „keine Sprünge auftreten“ und verbindet damit ebenso „automatisch“ zugehörige Eigenschaften. Das kann in der Praxis recht gefährlich werden!  
Hier zwei Stichworte für Beispiele solcher Situationen:
  - a. Kostenfunktionen in Situationen, bei denen ab einer bestimmten produzierten Menge eine weitere Maschine einzusetzen ist;
  - b. Manche Funktionen bei Programmiersprachen, z. B. solche, die das „Abschneiden von Nachkommastellen“ beschreiben.Was bedeutet es nun, dass Phänomene wie bei diesen Funktionen nicht auftreten?
- In der Informatik treten Overflow- und Underflow – Phänomene auf, d.h. Probleme bei der Behandlung „sehr großer“ und betragsmäßig „sehr kleiner“ Zahlen. Man muss z. B. aufpassen, wenn Funktionswerte „gegen 0“ oder „gegen  $\infty$ “ streben. Was bedeutet das eigentlich genau?

In der Mathematik ist es oft üblich, neue Begriffe durch Zurückführen auf bekannte zu erklären. So wird hier die Grenzwertbildung bei Funktionen auf die bei Folgen zurückgeführt:

#### A.2.1.1. Grenzwertbildung bei Funktionen und Stetigkeit

$I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall ( im Sinne von G.2.2.3., aber auch  $\mathbb{R} = ]-\infty; \infty[$  ist zugelassen ) und  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ .

1. Es sei  $x_0 \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( bzw.  $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ) eine Funktion. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c,$$

falls für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in I$  ( bzw.  $x_n \in I \setminus \{x_0\}$  ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

2. Ist  $\infty$  ( bzw.  $-\infty$  ) Intervallgrenze von  $I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \text{ ( bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \text{ ),}$$

falls für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in I$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

( bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  ) gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

3.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **in**  $x_0 \in I$  **stetig**, falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt.
4.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig**, falls  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist.

→ Aufgaben 85 und 86

Auch bei Stetigkeitsnachweisen arbeitet man nicht immer gern mit der Definition. Deshalb ist die Antwort auf die folgende Frage von Interesse:

### A.2.1.2. Wie bekommt man aus stetigen Funktionen „neue“?

1. Sind  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so gilt:
  - a.  $f, g$  stetig in  $x_0 \Rightarrow f + g$  stetig in  $x_0$
  - b.  $f$  stetig in  $x_0 \Rightarrow c \cdot f$  stetig in  $x_0$
  - c.  $f, g$  stetig in  $x_0$ ,  $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$  stetig in  $x_0$
2. Sind  $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $W_f \subseteq I_2$ ,  $x_0 \in I_1$ , so gilt:  
 $f$  stetig in  $x_0$ ,  $g$  stetig in  $f(x_0) \Rightarrow h = g \circ f$  stetig in  $x_0$
3. Hat eine stetige Funktion eine Umkehrfunktion, so ist auch diese stetig.

Da konstante Funktionen und die Identität stetig sind, folgt sofort aus A.2.1.2.:

### A.2.1.3. Die Stetigkeit rationaler Funktionen

Gebrochen-rationale Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig; insbesondere sind Polynomfunktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Und wie sieht es nun mit den speziellen Funktionen aus Abschnitt A.1.5. bezüglich Stetigkeit aus? Gut – ausschlaggebend ist dafür das folgende Resultat:

### A.2.1.4. Die Stetigkeit von Potenzreihen

Sei  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$  und Konvergenz-

intervall  $I_R$ . Dann ist  $f: I_R \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$  stetig.

### Beispiele zu A.2.1.4. und Folgerungen:

1. Aus A.2.1.4. folgt sofort die Stetigkeit von  $\exp, \sin, \cos$ .
2.  $\tan$  und  $\cot$  sind dann als Quotienten von  $\sin$  und  $\cos$  stetig.
3.  $\ln, \arcsin, \arccos, \arctan, \text{arc cot}$  sind dann als Umkehrfunktionen stetiger Funktionen stetig.
4.  $\exp_a$  und  $\log_a$  sind dann stetig, da  $\exp, \ln$  und die Multiplikation mit Konstanten stetig sind und die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.

Kurz: Alle in Abschnitt A.1.5. betrachteten reellen Funktionen sind stetig!

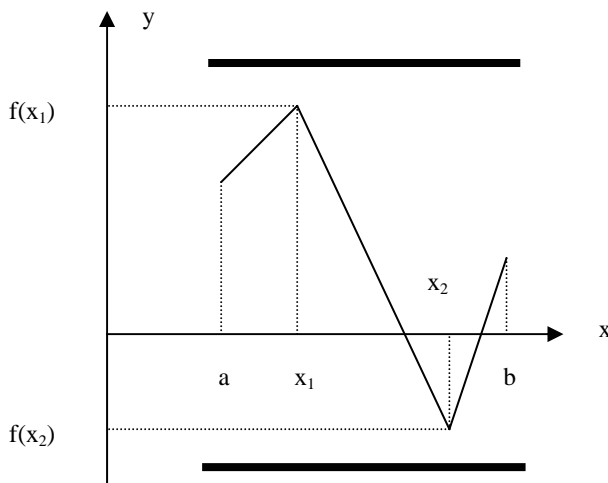
Wir wollen nun darauf eingehen, warum stetige Funktionen so „schön“ sind. Im folgenden werden einige gute Eigenschaften vorgestellt:

### A.2.1.5. Eigenschaften von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann gelten:

1.  $f$  ist beschränkt.  
( **Satz von der Beschränktheit** )
2. Es gibt  $x_1, x_2 \in [a; b]$  mit  $f(x_1) = \max W_f$ ,  $f(x_2) = \min W_f$ .  
( **Satz vom Maximum / Minimum** )  
Achtung:  $x_1$  und  $x_2$  sind nicht immer eindeutig bestimmt.

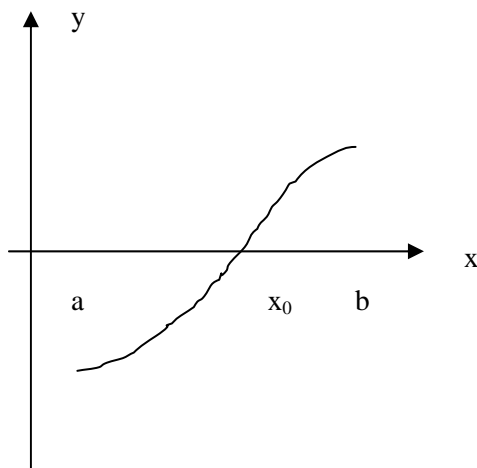
Anschauung zu 1. und 2.:



3. Gilt  $f(a) \cdot f(b) < 0$  ( d.h.  $f(a)$  und  $f(b)$  haben unterschiedliches Vorzeichen ), so gibt es  $x_0 \in ]a; b[$  mit  $f(x_0) = 0$ . ( **Nullstellensatz; manchmal auch Zwischenwertsatz** ).

Achtung:  $x_0$  ist nicht immer eindeutig bestimmt.

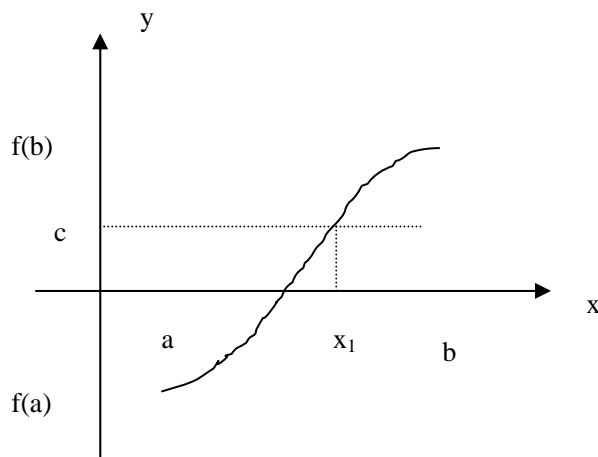
Anschauung zu 3.:



4. Zu jeder Zahl  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es  $x_1 \in [a; b]$  mit  $f(x_1) = c$ . ( **Zwischenwertsatz; manchmal auch Folgerung aus dem Zwischenwertsatz** )

Achtung:  $x_1$  ist nicht immer eindeutig bestimmt.

Anschauung zu 4.:



Der Nullstellensatz ist die Grundlage für ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungswerten für eine Nullstelle einer stetigen Funktion  $f$ .

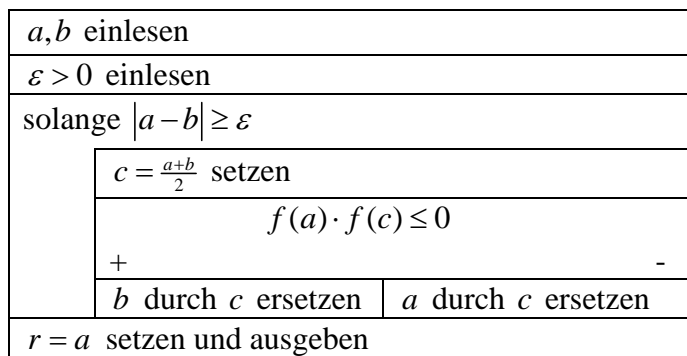
Idee: Man startet mit einem Intervall  $[a;b]$  mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Man teile dieses Intervall in zwei Teilintervalle gleicher Länge und sehe nach, in welchem dieser Intervalle die Funktionswerte an den Intervallgrenzen unterschiedliches Vorzeichen haben. Das ist das neue Intervall. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis das Intervall „klein“ genug ist; die Intervallgrenzen sind dann Näherungswerte für eine Nullstelle von  $f$ . Näherungswert und Nullstelle unterscheiden sich höchstens um die Intervalllänge voneinander.

Man erhält den folgenden Algorithmus:

### A.2.1.6. Das Bisektionsverfahren

Das Verfahren bestimmt zu einer stetigen Funktion  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$  einen Näherungswert  $r$  für eine Nullstelle  $x_0$  mit  $|r - x_0| < \varepsilon$ , wobei die Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$  eingegeben wird.

Struktogramm:



( Bitte ergänzen Sie die beiden fehlenden Linien bei der Entscheidung im Struktogramm! )

### Beispiel zum Bisektionsverfahren A.2.1.6.:

Man kann sich überlegen, dass  $f : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^6 - x - 1$  genau eine Nullstelle  $x_0$  hat.

Gesucht ist ein Näherungswert  $r$  von  $x_0$  mit  $|r - x_0| < 0,1$ .

Setze in A.2.1.6.  $a = 1$  und  $b = 2$ ;  $f$  ist stetig mit  $f(a) \cdot f(b) = f(1) \cdot f(2) = -61 < 0$ .

Setze ferner  $\varepsilon = 0,1$ .

Protokoll der weiteren Schritte:

( (+) bzw. (-) gibt an, ob der Funktionswert positiv oder negativ ist. )

Schleife Nr.	$c$	$a$	$b$	$ b - a $
-	-	1 (-)	2 (+)	1
1	1,5 (+)	1 (-)	1,5 (+)	0,5
2	1,25 (+)	1 (-)	1,25 (+)	0,25
3				
4				

Setze  $r = \dots\dots\dots$

Bitte ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle und den fehlenden Wert für  $r$ .

→ Aufgabe 87