

A.2.2. Differenzierbare Funktionen und ihre Ableitungen

Wozu braucht man Kenntnisse über differenzierbare Funktionen und Ableitungen?

- Ableitungen helfen bei der Beschreibung von Änderungen.
Etwa in der Physik:
Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges;
Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit;
usw.
Aber auch in der Wirtschaft:
Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion;
usw.
- Kenntnisse über Ableitungen sind notwendig, um viele praktisch relevante, mathematisch formulierbare Aufgaben zu lösen – denken Sie z. B. an die in der Schule behandelten Extremwertaufgaben.
- Wie Sie bereits gelernt haben, sind für Informatiker Potenzreihendarstellungen von Funktionen besonders wichtig. Im Abschnitt A.2.3. werden wir Ableitungen verwenden, um unter gewissen Voraussetzungen Potenzreihendarstellungen von Funktionen zu erhalten.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich zunächst mit der Definition der Ableitung und den Ableitungsregeln.

Vorüberlegung zu A.2.2.1.:

→ Bild als Kopiervorlage

A.2.2.1. Differenzierbarkeit, Ableitung, Tangente, Steigung

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f heißt in x_0 **differenzierbar**, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- der Limes des **Differenzenquotienten** – existiert.

In diesem Fall heißt dieser Limes **Ableitung** oder **Differenzialquotient** von f in x_0 .

Bezeichnungen: $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

2. Ist f in x_0 differenzierbar, so heißt der Graph von

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

die **Tangente** an G_f durch $(x_0; f(x_0))$.

In diesem Kontext heißt $f'(x_0)$ auch die **Steigung** oder der **Anstieg** von f in x_0 .

3. f heißt **differenzierbar**, falls f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall ist $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ die **Ableitungsfunktion** (oder kurz **Ableitung**) von f .

Sie werden in der Lehrveranstaltung lernen, wie man mit Hilfe von A.2.2.1. Differenzierbarkeit nachweist und einfache Ableitungen bestimmt. Diese Ableitungen, aber auch viele weitere, die in der Lehrveranstaltung vorkommen werden, finden Sie in der folgenden **Tabelle wichtiger Ableitungen** zusammengestellt:

Tabelle wichtiger Ableitungen

$f(x) =$	$f'(x) =$	für $x \in$
c (Konstante)	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$n \cdot x^{n-1}$	\mathbb{R}
x^{-n}	$-n \cdot x^{-(n+1)}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; \infty[$
$\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$ gerade)	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$]0; \infty[$
$\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$ ungerade)	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0; \infty[$
$\exp_a(x) = a^x$ ($a > 0$)	$\ln(a) \cdot \exp_a(x) = \ln(a) \cdot a^x$	\mathbb{R}
$\log_a(x)$ ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$]0; \infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$\text{arc cot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$]0; \infty[$

→ Aufgabe 88

Bei den Beispielen zu A.2.2.1. werden Sie auch eine stetige Funktion kennen lernen, die nicht differenzierbar ist. Umgekehrt gibt es keine differenzierbaren Funktionen, die nicht stetig sind:

A.2.2.2. Die Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $x_0 \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Alle Beispiele unstetiger Funktionen liefern also Funktionen, die nicht differenzierbar sind.

Im Folgenden interessieren uns allerdings differenzierbare Funktionen mehr. Wie üblich versuchen wir, aus bekannten „neue“ zu bekommen mit den zugehörigen Ableitungen. Wir stellen dazu Blöcke wichtiger Ableitungsregeln zusammen und schließen in der Lehrveranstaltung jeweils Beispiele an:

A.2.2.3. Konstanten-, Summen-, Produkt- und Quotientenregel

1. f in x differenzierbar, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $c \cdot f$ in x differenzierbar mit $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
(**Konstantenregel**)
2. f, g in x differenzierbar \Rightarrow
 $f + g$ in x differenzierbar mit $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
(**Summenregel**)
3. f, g in x differenzierbar \Rightarrow
 $f \cdot g$ in x differenzierbar mit $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(**Produktregel**)
4. f, g in x differenzierbar, $g(x) \neq 0 \Rightarrow$
 $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
(**Quotientenregel**)

Als Folgerung aus A.2.2.3., 1. – 3., erhalten wir:

A.2.2.4. Die Ableitung von Polynomfunktionen

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

→ Aufgabe 89

A.2.2.4. hat eine Verallgemeinerung auf Potenzreihen:

A.2.2.5. Die Ableitung von Potenzreihen

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ sei eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \neq 0$ und Konvergenzintervall I_R .

Dann ist $f : I_R \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (x - x_0)^{i-1}$.

Merkregel: Potenzreihen werden im Konvergenzintervall summandenweise differenziert!

→ Aufgabe 90

Viele wichtige Funktionen erhält man durch Bilden der Umkehrfunktion aus bekannten Funktionen. Es stellt sich daher die Frage nach Beziehungen zwischen den Ableitungen von Funktion und Umkehrfunktion.

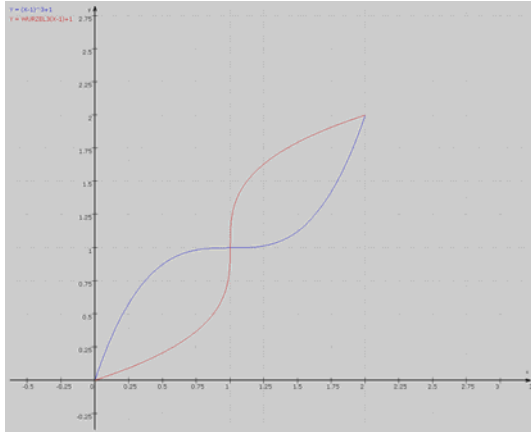
Schon ein Bild zeigt, dass Umkehrfunktionen von differenzierbaren Funktionen nicht differenzierbar sein müssen:

Vorabbeispiel zu A.2.2.6.:

$f : [0; 2] \rightarrow [0; 2]$ mit $f(x) = (x - 1)^3 + 1$ ist differenzierbar.

$f^{-1} : [0; 2] \rightarrow [0; 2]$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 1$ ist dagegen in $x_0 = 1$ NICHT differenzierbar.

Anschauliche Erklärung:



Die Tangente an G_f durch $(1;1)$ hat die Steigung 0 – zeichnen Sie bitte diese Tangente ein.
 Die Tangente an $G_{f^{-1}}$ durch $(1;1)$ hat folglich die „Steigung“ ∞ – zeichnen Sie bitte auch diese Tangente ein.

Man bekommt analog immer dann Probleme, wenn die Ableitung 0 bei f vorkommt. „Sonst“ geht alles gut:

A.2.2.6. Die Ableitung der Umkehrfunktion

$f : I \rightarrow J$ (I, J Intervalle) habe eine Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Ist $x \in J$ und f in $f^{-1}(x)$ differenzierbar mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, so ist f^{-1} in x differenzierbar

mit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

→ Aufgabe 91

Als letzte Ableitungsregel sehen wir uns die Kettenregel an:

A.2.2.7. Die Kettenregel

Sei $f = g \circ h$; h sei in x differenzierbar, g sei in $h(x)$ differenzierbar.

Dann ist f in x differenzierbar mit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

„äußere Ableitung“ ↗ ↖ „innere Ableitung“

→ Aufgaben 92, 93

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Betrachtungen über höhere Ableitungen. Diese werden wir u. A. im folgenden Abschnitt benötigen, um für gegebene Funktionen unter gewissen Voraussetzungen Reihendarstellungen zu erhalten:

A.2.2.8. Höhere Ableitungen

Höhere Ableitungen kann man am einfachsten rekursiv erklären:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

I. f ist **einmal differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist.

Schreibweise auch: $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

II. f ist $(n+1)$ -mal differenzierbar, falls die n . Ableitung $f^{(n)}$ von f existiert und differenzierbar ist.

Schreibweise: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x)$.

f ist **beliebig (unendlich) oft differenzierbar**, falls f für jedes $n \in \mathbb{N}$ n -mal differenzierbar ist.

→ Aufgabe 94