A.2.3. Taylorpolynome und Taylorreihen

Wozu braucht man Taylorpolynome und Taylorreihen?

- In der Einführung in die Differenzialrechnung (vgl. Vorüberlegung zu A.2.2.1.) haben wir über die Tangente an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f durch $(x_0; f(x_0))$ gesprochen und über die zugehörige Funktion $t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ist f „kompliziert", so wird in der Nähe von x_0 gern mit dem „einfacheren" t, also einem Polynom vom Grad ≤ 1, gearbeitet. Nun wird dieses Vorgehen manchmal zu „grob" sein, d.h. zu sehr ungenauen Ergebnissen führen. Was geschieht aber, wenn man statt t Polynome höheren Grades betrachtet? Diese Fragestellung führt auf die in der Überschrift erwähnten Taylorpolynome.
- Sie wissen schon, dass es sich mit Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind (z. B. $\exp, \sin, \cos$) gut arbeiten lässt: z. B. kann man Funktionswerte näherungsweise über Partialsummen berechnen, was programmierungstechnisch einfach ist. Daher stellt sich die Frage, ob alle Funktionen eine Potenzreihendarstellung haben. Die Antwort ist sicher „nein", da Potenzreihen im Konvergenzintervall unendlich oft differenzierbar sind. Sinnvoller ist schon die Frage, ob alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen eine Potenzreihendarstellung haben, und wie diese gegebenenfalls aussieht. Diese Fragestellung führt uns auf die Untersuchung von Taylorreihen.

Wir beginnen mit der Betrachtung von Taylorpolynomen und erhalten nach einer genaueren Analyse des Tangentenbegriffs und dessen Verallgemeinerung die folgende Definition:

A.2.3.1. Das n. Taylorpolynom

$f: I\to\mathbb{R}$ (I Intervall) sei in $x_0\in I$ n- mal differenzierbar.
Dann gibt es genau ein Polynom p_n vom Grad $\le n$ mit

$$p_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \text{ für alle } i = 0,\dots,n,$$

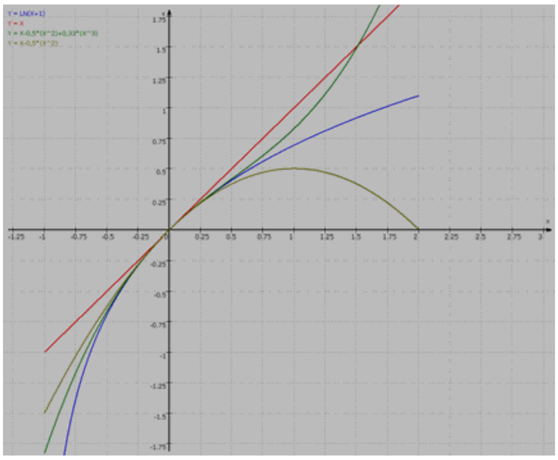
nämlich

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i .$$

(Dabei ist $p_n^{(0)}(x) = p_n(x)$ und $f^{(0)}(x) = f(x)$ gesetzt.)
p_n heißt das n. **Taylorpolynom von** f **mit Entwicklungspunkt** x_0.

Beispiel 1 zu A.2.3.1. / Anschauung

Betrachtet wird $f:]-1;\infty[\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\ln(x+1)$. In der Lehrveranstaltung wird dann das 3. Taylorpolynom p_3 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ berechnet; Ergebnis ist
$p_3(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$.
Das Bild auf der folgenden Seite zeigt die Graphen von f, p_1, p_2 und p_3 im Intervall]-1;2]:



→ Aufgabe 95

Wie schon in der Einleitung des Kapitels erwähnt wurde, wird in der Nähe von x_0 statt mit f gern mit p_n gearbeitet: $p_n(x)$ wird als Näherungswert für $f(x)$ verwendet. Wie kontrolliert man dabei, wie genau der berechnete Näherungswert ist? Antwort auf diese Frage gibt die so genannte Restgliedabschätzung:

A.2.3.2. Restgliedabschätzung

$f:[a;b] \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$ - mal stetig differenzierbar, $x_0 \in [a;b]$ und p_n das n. Taylor-polynom von f mit Entwicklungspunkt x_0.

1. R_{n+1} mit $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$ heißt das n**. Restglied von** f **an der Stelle** x_0.
2. **Restgliedabschätzung nach Lagrange**:
   Zu jeden $x \in [a;b]$ gibt es $\tilde{x}$ zwischen x und x_0, so dass
   $$R_{n+1}(x) = \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tilde{x})(x - x_0)^{n+1}.$$

→ Aufgabe 96

→ Aufgabe 97 (Tüftelaufgabe ohne Parallelaufgabe in den Übungen mit Anregung zum Programmieren)

Wir kommen nun zu der zweiten in der Einführung angesprochenen Frage, nämlich zu der Frage nach der Potenzreihendarstellung einer gegebenen Funktion. Da durch Potenzreihen dargestellte Funktionen stets unendlich oft differenzierbar sind, müssen wir unsere Betrachtung auf solche Funktionen beschränken.
Es bietet sich in diesem Kontext nahezu an, die Potenzreihe anzuschauen, die als Partialsummen die Taylorpolynome hat. Dies ist die Taylorreihe:

A.2.3.3. Die Taylorreihe

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, sei unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann heißt die Potenzreihe

$$t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i$$

die **Taylorreihe von** f **mit Entwicklungspunkt** x_0.

Vorsicht! $t(x)$ muss nicht für alle $x \in I$ konvergieren! Die Methoden aus Kapitel A.1.5. liefern, wann $t(x)$ konvergiert. (Stichwörter: Konvergenzradius, Konvergenzintervall…)

$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 98}}$

Beispiel 2 zu A.2.3.3. der Lehrveranstaltung beschäftigt sich mit der Taylorreihe der Funktion $\cos$. Dabei stellt sich heraus, dass die Taylorreihe die bereits bekannte $\cos$ - Reihe ist. Das ist kein Wunder, denn es gilt:

A.2.3.4. Eine Potenzreihendarstellung liefert „automatisch“ die Taylorreihe
$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, sei eine Funktion und $x_0 \in I$.

Für alle $x \in I$ gelte $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$. Dann ist die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Wir kennen also für $f = \exp, \sin, \cos$ die Taylorreihe t mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ schon, und es ist $t(x) = f(x)$ für alle $x \in I_R (= \mathbb{R})$.

In diesem Zusammenhang stellt sich die folgende <u>Frage</u>: Gilt stets $t(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für die $t(x)$ konvergiert? I. A. ist die <u>Antwort</u> leider „nein:

Beispiel A.2.3.5.:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0; \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
Dann werden wir in der Lehrveranstaltung sehen, dass die Taylorreihe $t(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent ist, aber $t(x) \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$ gilt.

In vielen Situationen ist die Antwort aber „ja“; wir geben zwei wichtige Beispiele an:

A.2.3.6. Die Logarithmusreihe

Für alle $x \in]-1;1]$ gilt $\ln(x+1) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} x^i$.

A.2.3.7. Die Arcustangensreihe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt $\arctan(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}$.

Den Nachweis für $|x| < 1$ können Sie selbst führen als

$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 99}}$