L.5. Lineare Abbildungen

L.5.1. Grundlegendes über lineare Abbildungen

Eine unterhaltsame Einführung in die Thematik des Kapitels
Eine Überraschung zu Semesterbeginn; für Interessenten gibt es im Anschluss auch ein

$\boxed{\to \text{ Bild als Kopiervorlage}}$

L.5.1.1. Lineare Abbildungen

Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Abbildung** (oder $\mathbb{R}$ **- Homomorphismus**), falls für alle $\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und alle $k \in \mathbb{R}$ gilt:

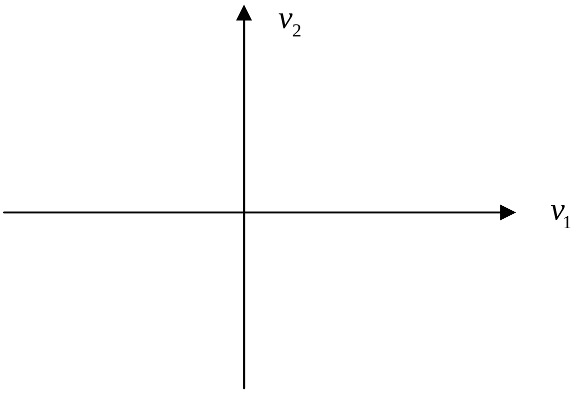
a. $f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$;
b. $f(k\cdot\vec{v}) = k\cdot f(\vec{v})$.

Die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ wird mit $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ bezeichnet.

Beispiele zu L.5.1.1.:

1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

   a. In der Lehrveranstaltung wird nachgerechnet werden, dass f tatsächlich eine lineare Abbildung ist.
   b. Veranschaulichung und geometrische Interpretation:

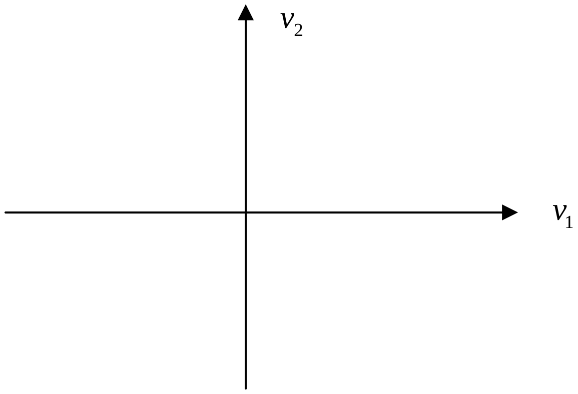


   Zeichen Sie in dem obigen Bild bitte $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein. Dann erkennen Sie, dass f eine **Drehung um den Nullpunkt** um 90^0 in mathematisch positiver Richtung beschreibt.
   c. Beschreibung durch eine Matrix:
   Es gilt $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wie in der Lehrveranstaltung nachgerechnet wird.

2. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

   a. In der Lehrveranstaltung wird nachgerechnet werden, dass f tatsächlich eine lineare Abbildung ist.

b. <u>Veranschaulichung und geometrische Interpretation</u>:



Zeichen Sie in dem obigen Bild bitte $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein. Geben Sie dann bitte selbst eine geometrische Interpretation von f an:

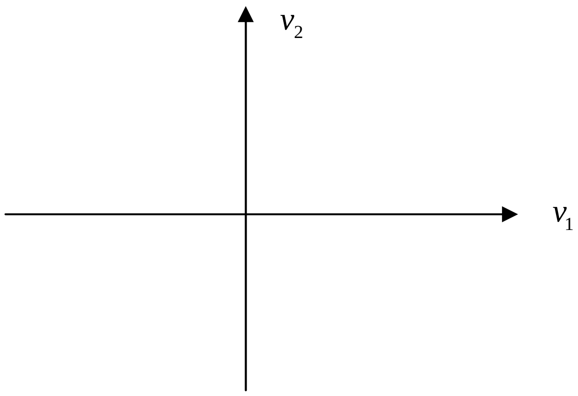
c. <u>Beschreibung durch eine Matrix</u>:

Es gilt $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wie in der Lehrveranstaltung nachgerechnet wird.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$.

a. Auch f ist tatsächlich eine <u>lineare Abbildung</u>.

b. <u>Veranschaulichung und geometrische Interpretation</u>:



Zeichen Sie in dem obigen Bild bitte $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein. Geben Sie dann bitte auch hier selbst eine geometrische Interpretation von f an:

c. <u>Beschreibung durch eine Matrix</u>:

Es gilt $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, wie in der Lehrveranstaltung nachgerechnet wird.

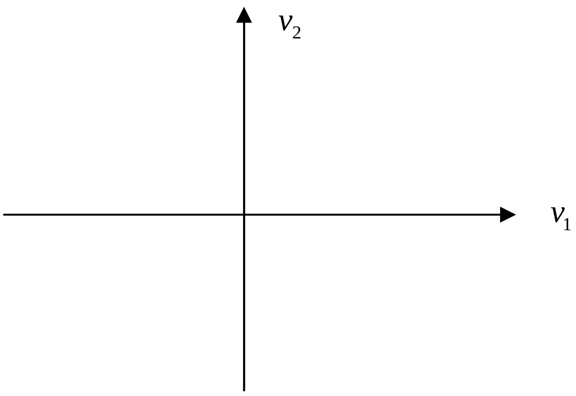
$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 57}}$

4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 1 \\ v_2 + 1 \end{pmatrix}$.

   a. Es wird in der Lehrveranstaltung gezeigt werden, dass f <u>keine lineare Abbildung</u> ist.
   Etwas zum Hintergrund liefert

   $\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 58 (ohne Parallelaufgabe in den Übungen)}}$

   b. Trotzdem lässt sich f <u>geometrisch interpretieren</u>:



   Zeichen Sie in dem obigen Bild bitte ebenfalls $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein. Dann erkennen Sie, dass f eine **Verschiebung** um den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt.

Verschiebungen nennt man auch **Translationen**:

L.5.1.2. Translationen und affine Abbildungen

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Translation**, falls es $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{x}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **affine Abbildung**, falls eine lineare Abbildung $f_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Translation $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $f = f_t \circ f_l$.

Wer lineare Abbildungen kennt, kennt also auch affine Abbildungen! Daher beschäftigen wir uns im Folgenden nur noch mit linearen Abbildungen.

Alle bisher in der Lehrveranstaltung betrachteten linearen Abbildungen konnten mit Hilfe von Matrizen beschrieben werden – gilt dies auch generell? Mit dieser Frage beschäftigt sich der folgende Abschnitt.