L.5.2. Lineare Abbildungen und Matrizen

Vorüberlegung zu L.5.2.1.

Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann gilt:

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f\left(v_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_1} + v_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_2} \right) = v_1 \cdot f(\vec{e}_1) + v_2 \cdot f(\vec{e}_2) = \boxed{*}$$

Ist $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, so folgt:

$$\boxed{*} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot a_{1,1} + v_2 \cdot a_{1,2} \\ v_1 \cdot a_{2,1} + v_2 \cdot a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend kann man allgemein argumentieren und erhält:

L.5.2.1. Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

1. Ist $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, so ist $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n = M(n \times 1, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung.
   Merkregel: Jede Matrix liefert eine lineare Abbildung; diese multipliziert einen Vektor mit der Matrix.
2. Ist $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $A_f = (a_{i,j}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ definiert durch
   $$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \text{ für alle } j = 1, \ldots, n,$$
   so gilt $f(\vec{v}) = A_f \cdot \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, d.h. $f = f_{A_f}$.
   Merkregel: Jede lineare Abbildung wird durch eine Matrix geliefert; dabei stehen in den Spalten die Funktionswerte der kanonischen Basisvektoren.

Beispiel 3) zu L.5.2.1.: Drehung um den Winkel α

Gesucht ist die Funktionsvorschrift der Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die eine Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel α im mathematisch positiven Drehsinn beschreibt.

a. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung (warum?), also ist f von der Form f_{A_f} mit

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2.1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \text{ wobei } f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}, \; f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

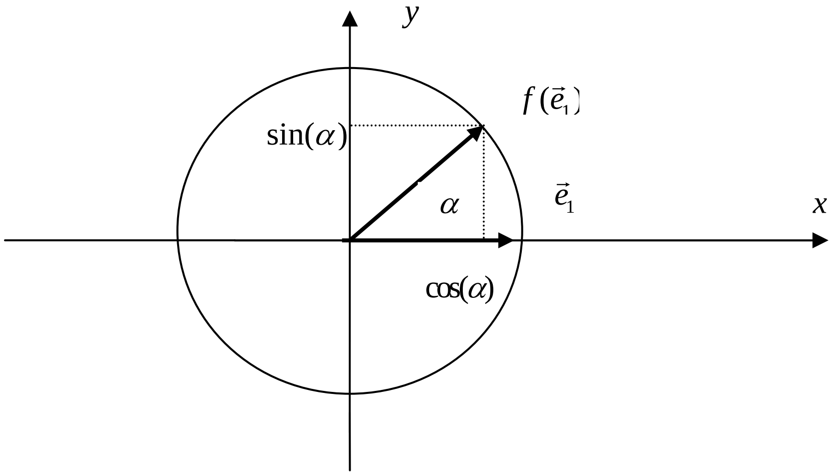
b. Bestimme also noch $f(\vec{e}_1)$ und $f(\vec{e}_2)$.

Die unten stehende Skizze zeigt zunächst $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

Ergänzen Sie nun die Skizze durch $\vec{e}_2$ und $f(\vec{e}_2)$.

Dann können Sie ablesen: $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Damit folgt: $A_f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.



c. Also gilt: $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f_{A_f}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot v_1 - \sin(\alpha)\cdot v_2 \\ \sin(\alpha)\cdot v_1 + \cos(\alpha)\cdot v_2 \end{pmatrix}$.

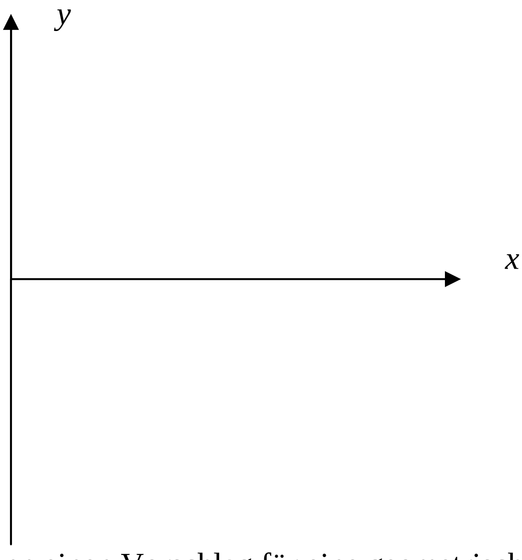
Beispiel 4) zu L.5.2.1.: Manchmal versteht man lineare Abbildungen besser, wenn man nicht nur auf die kanonische Basis schaut.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine geometrische Interpretation von f_A.

Wir wissen: $f_A(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\quad f_A(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $f_A(\vec{e}_1)$ und $f_A(\vec{e}_2)$ in die Skizze unten ein.



Machen Sie dann einen Vorschlag für eine geometrische Interpretation:

……………………………………………………………………………………………...

Probleme? Dann folgt eine Hilfe:

Sei $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann gilt: $f_A(\vec{b}_1) =$ ………., $f_A(\vec{b}_2) =$ …………

Zeichnen Sie nun $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $f_A\left(\vec{b}_1\right)$ und $f_A\left(\vec{b}_2\right)$ in die Skizze oben ein.

Machen Sie jetzt einen erneuten Vorschlag für eine geometrische Interpretation:

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

→ Aufgabe 59

Das letzte Beispiel deutet schon an, dass es einen Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen gibt, der über die Betrachtungen aus L.5.2.1. hinausgeht und geometrisch von Bedeutung ist. Dieser Zusammenhang benutzt statt der kanonischen Basis beliebige Basen, z. B. solche, die ein „günstiges Koordinatensystem“ definieren. Wir wollen uns diesen Zusammenhang, der leider nicht ganz unkompliziert ist, nun anschauen:

L.5.2.2. Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen – der allgemeine Fall

Gegeben sind eine Basis $B = (\vec{b}_1;...;\vec{b}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ und eine Basis $\hat{B} = (\vec{w}_1;...;\vec{w}_m)$ des $\mathbb{R}^m$.

1. Ist $A = \left(a_{i,j}\right) \in M(m \times n, \mathbb{R})$, so ist

   $$f_A^{\hat{B},B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mit } f_A^{\hat{B},B}(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \vec{b}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot \vec{w}_i)$$

   eine lineare Abbildung.

   Merkregel: $f_A^{\hat{B},B}$ bildet $\vec{b}_j$ auf die Linearkombination von $\vec{w}_1,...,\vec{w}_m$ ab, deren Koeffizienten in Spalte j von A stehen.

2. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $A_f^{\hat{B},B} = \left(a_{i,j}\right) \in M(m \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $f(\vec{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot \vec{w}_i$, so ist $f = f_{A_f^{\hat{B},B}}^{\hat{B},B}$.

   Merkregel: Spalte j von $A_f^{\hat{B},B}$ enthält die Koeffizienten der Darstellung von $f(\vec{b}_j)$ als Linearkombination von $\vec{w}_1,...,\vec{w}_m$.

→ Aufgabe 60

$A_f^{\hat{B},B}$ beschreibt oft sehr viel besser als A_f, wie sich f geometrisch verhält. Andererseits ist A_f besser geeignet, um Funktionswerte der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu berechnen. Daher ist ein Zusammenhang zwischen $A_f^{\hat{B},B}$ und A_f von Interesse. Wir geben einen solchen für $B = \hat{B}$ (und damit $n = m$) an.

L.5.2.3. Die Berechnung von A_f aus $A_f^{B,B}$ (und umgekehrt)

$B = (\vec{b}_1;...;\vec{b}_n)$ sei eine Basis des $\mathbb{R}^n$; $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ habe $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ als Spalten.
Dann ist C invertierbar und es gilt für jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$A_f = C \cdot A_f^{B,B} \cdot C^{-1}$$

(bzw. äquivalent $A_f^{B,B} = C^{-1} \cdot A_f \cdot C$) .

Dieses Resultat erlaubt es, lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit gewünschten geometrischen Eigenschaften in zwei Schritten anzugeben:

- Man bestimmt zunächst die Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ bezüglich einer günstigen Basis.
- Man berechnet dann mit Hilfe von L.5.2.3. A_f und erhält f .

Dieses Verfahren kann man z.B. benutzen, um Spiegelungen an beliebigen Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt zu beschreiben.

$\boxed{\to \text{ Aufgabe 61}}$