L.6.Eigenwertprobleme

L.6.1. Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

Wozu braucht man Eigenwerte und Eigenvektoren?

Dazu:

Vorüberlegung zu L.6.1.1.:
In Beispiel 4) zu L.5.2.1. haben wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

betrachtet und nach einer geometrischen Interpretation von $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ gefragt.
Durch „Raten" haben wir gefunden:

- für $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $f_A(\vec{b}_1) = A \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1$; $\boxed{*}$
- für $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt $f_A(\vec{b}_2) = A \cdot \vec{b}_2 = -\vec{b}_2 = (-1) \cdot \vec{b}_2$. $\boxed{**}$

Damit ist f_A eine Spiegelung an der Geraden durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\vec{b}_1$.
Was macht man aber, wenn „Raten" nicht weiter hilft? Darum soll es in diesem Abschnitt gehen!
Die Gleichungen unter $\boxed{*}$ und $\boxed{**}$ sind vom Typ

$$f_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \text{ mit } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Gleichungen dieser Art werden Sie in der folgenden Definition finden:

L.6.1.1. Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume einer Matrix
Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
$\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert von** A**,** falls es $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.
Ein solches $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ heißt dann **Eigenvektor von** A **zum Eigenwert** λ**.**
Ferner heißt

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}\}$$

der **Eigenraum von** A **zum Eigenwert** λ**.**
$\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ besteht also aus allen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ und dem Nullvektor.

Beispiel zu L.6.1.1.
In der Situation der Vorüberlegung zu L.6.1.1. gilt:

- für $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ und $A \cdot \vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1$, d.h. 1 ist ein Eigenwert von A und $\vec{b}_1$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1;
- für $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{b}_2 \neq \vec{0}$ und $A \cdot \vec{b}_2 = (-1) \cdot \vec{b}_2$, d.h. -1 ist ein Eigenwert von A und $\vec{b}_2$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1.

Dieses Beispiel macht deutlich, dass im Zusammenhang mit Eigenwerten und Eigenvektoren noch Fragen offen sind:

Frage 1: Haben wir mit 1 und -1 alle Eigenwerte von A gefunden?
Frage 2: Wie bekommt man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A durch Rechnung statt durch „Raten“?

Das folgende Resultat zeigt u. a., dass Frage 1 mit „ja“ zu beantworten ist:

L.6.1.2. Eigenwerte zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig
Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
Für $i = 1,...,r$ sei $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i. Dabei gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
Dann sind die Vektoren $\vec{v}_1,...,\vec{v}_r$ linear unabhängig.
Insbesondere folgt: A hat höchstens n Eigenwerte.

Wenden wir uns nun Frage 2, d.h. der Frage nach Berechnungsmethoden für Eigenwerte und Eigenvektoren, zu:

L.6.1.3. Berechnung von Eigenwerten, Eigenvektoren, Eigenräumen; die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$

Ist λ Eigenwert von A, so gilt ferner:

2. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \in Lös(A - \lambda \cdot E_n, \vec{0}) \setminus \{\vec{0}\}$.
3. $Eig(A, \lambda) = Lös(A - \lambda \cdot E_n, \vec{0})$.
   Die Dimension $d = \dim(Eig(A, \lambda)) = n - rg(A - \lambda \cdot E_n)$ heißt die **geometrische Vielfachheit von** λ.

Zur Berechnung der Eigenwerte von A sind die Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, das anschließend betrachtet wird:

L.6.1.4. Das charakteristische Polynom und die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts
Für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist $\det(A - \lambda \cdot E_n)$ ein Polynom vom Grad n, das **charakteristische Polynom von** A, das mit p_A bezeichnet wird.
Ist λ ein Eigenwert von A, so heißt die Vielfachheit von λ als Nullstelle von p_A die **algebraische Vielfachheit von** λ**.**

$\boxed{\to \text{ Aufgabe 62}}$