L.6.2. Diagonalisierbarkeit

Vorabbeispiel zu L.6.2.1.
Wir kehren noch einmal zu unserem Ausgangsbeispiel zurück, also zu

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$$

und der zugehörigen linearen Abbildung $f = f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}$. Betrachtet man die Eigenvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, so wissen wir, dass diese eine Basis $B = (\vec{b}_1;\vec{b}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ bilden und dass (vgl. Beispiel 2 zu L.5.2.2.)

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.
$A_f^{B,B}$ ist eine Matrix, die außerhalb der Hauptdiagonalen lauter Nullen hat, eine so genannte **Diagonalmatrix**; auf der Hauptdiagonalen stehen die Eigenwerte von A.
Hat C die Spalten $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$, so gilt (vgl. Vorabbeispiel zu L.5.2.3.)

$$A = C\cdot A_f^{B,B}\cdot C^{-1}$$

bzw.

$$A_f^{B,B} = C^{-1}\cdot A\cdot C \ .$$

Diese Betrachtungen passen in den folgenden Kontext:

L.6.2.1. Diagonalisierbarkeit

1. $D = \left(d_{i,j}\right) \in M(n\times n, \mathbb{R})$ heißt **Diagonalmatrix**, falls $d_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.
2. Sei $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}$ die zugehörige lineare Abbildung.
   a. A heißt **diagonalisierbar**, falls es eine Basis B des $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A_f^{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist.
   b. A ist genau dann diagonalisierbar, falls es eine Basis B des $\mathbb{R}^n$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht.
   In diesem Fall gilt:
   Ist $B = (\vec{b}_1;...;\vec{b}_n)$, $A\cdot\vec{b}_i = \lambda_i\cdot\vec{b}_i$ für alle $i = 1,...,n$ und hat C die Spalten $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$, so ist

$$C^{-1}\cdot A\cdot C = A_f^{B,B} = D$$

   mit Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\boxed{\rightarrow \text{ Aufgabe 63}}$

Die Phänomene, die bei den in der Lehrveranstaltung behandelten Beispielen auftraten, sind typisch:

L.6.2.2. Charakterisierung diagonalisierbarer Matrizen

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann diagonalisierbar, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. das charakteristische Polynom p_A zerfällt vollständig in Linearfaktoren;
2. für jeden Eigenwert von A stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit überein.

Hinreichend **(Vorsicht! Nicht notwendig!)** für die Diagonalisierbarkeit von A ist, dass A n paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

Beispiele für die Anwendung dieser Charakterisierung finden Sie in

$\boxed{\rightarrow \text{Aufgabe 64}}$